10. Équations différentielles linéaires

I - Rappel : équations linéaires scalaires d'ordre 1

1) Structure de l'ensemble des solutions

I désigne un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; a et b sont des applications continues de I dans $\mathbb{K}$. On considère les équations différentielles :

$$(E) \quad y' = a(t)\,y + b(t) \quad \text{et} \quad (H) \quad y' = a(t)\,y$$

- L'ensemble $\mathcal{S}_I(H)$ des solutions de (H) sur I est la droite vectorielle
$$\mathcal{S}_I(H) = \left\{ t \mapsto \lambda.e^{A(t)},\ \lambda \in \mathbb{K} \right\}$$
cela pour toute primitive A de a sur I.
- L'ensemble $\mathcal{S}_I(E)$ des solutions de (E) sur I est une droite affine
$$\mathcal{S}_I(E) = \left\{ t \mapsto f_0(t) + \lambda.e^{A(t)},\ \lambda \in \mathbb{K} \right\}$$
cela pour toute primitive A de a sur I et toute "solution particulière" f_0 de (E) (il en existe !).
- **Problème de Cauchy** : pour tout $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, il existe une unique solution f de (E) sur I telle que $f(t_0) = y_0$, donnée par
$$\forall t \in I \quad f(t) = e^{A_0(t)} \cdot \left(y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A_0(s)} b(s)\,.\mathrm{d}s \right) \quad \text{où} \quad A_0 : t \mapsto \int_{t_0}^{t} a(u)\,.\mathrm{d}u$$

NB : dans le cas d'une équation linéaire *non résolue en* y', de la forme : $u(t)\,y' + v(t)\,y = w(t)$, les résultats précédents s'appliquent **sur tout intervalle où u ne s'annule pas** (et où u, v, w sont continues !).
On peut examiner ensuite les raccordements des solutions obtenues sur des intervalles adjacents.

2) Détermination pratique d'une "solution particulière"

- **Méthode de variation de la constante** : après avoir déterminé une primitive A de a, on trouve une solution de (E) sous la forme $t \mapsto \lambda(t)\,e^{A(t)}$, $\lambda \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ (puisqu'on connaît la structure de l'ensemble des solutions, il suffit de trouver une fonction λ qui convienne). En effet, si $y = \lambda(t)\,e^{A(t)}$, $y' = \lambda'(t)\,e^{A(t)} + \lambda(t)\,a(t)\,e^{A(t)}$, donc y est solution de (E) si et seulement si
$$\forall t \in I \quad \lambda'(t) = b(t)\,e^{-A(t)}$$
(on retrouve ainsi l'expression de la solution du problème de Cauchy).
- **Éviter** la variation de la constante lorsqu'il apparaît une solution "évidente" (constante, ...).
- **Cas où a est une constante et $b(t) = P(t)\,e^{kt}$, $k \in \mathbb{K}$, $P \in \mathbb{K}[X]$** : le changement de fonction inconnue $y = ze^{kt}$ (z est définie par $z = ye^{-kt}$) permet de se ramener à l'équation $z' + (k-a)\,z = P$, banale si $k = a$ et admettant sinon une unique solution polynomiale de même degré que P, que l'on peut déterminer à l'aide de coefficients indéterminés.
- **Principe de superposition des solutions** : pour obtenir une solution de
$$(E) \quad y' = a(t)\,y + b_1(t) + b_2(t)$$
il suffit d'ajouter y_1 et y_2, solutions respectives de
$$(E_1) \quad y' = a(t)\,y + b_1(t) \quad \text{et} \quad (E_2) \quad y' = a(t)\,y + b_2(t)$$
(le coefficient de y est **le même !**).
- Penser enfin à déterminer et éventuellement reconnaître les solutions développables en série entière.

II - Systèmes différentiels linéaires d'ordre 1 – Généralités

1) Notations

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, n un entier naturel au moins égal à 2, A une application continue de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, B une application continue de I dans $F = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$; le système différentiel

$$(S) \quad X' = A(t)\,X + B(t)$$

d'inconnue $X : I \to F$ est dit *système différentiel linéaire d'ordre* 1.

φ est *une solution de* (S) *sur* I si et seulement si φ est une application de I dans F, dérivable sur I et telle que

$$\forall t \in I \quad \varphi'(t) = A(t)\,\varphi(t) + B(t)$$

Si l'on note $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ alors (S) s'écrit

$$\begin{cases} x_1' = & a_{1,1}(t)\,x_1 + \cdots + a_{1,n}(t)\,x_n + b_1(t) \\ \ \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ x_n' = & a_{n,1}(t)\,x_1 + \cdots + a_{n,n}(t)\,x_n + b_n(t) \end{cases}$$

NB : une équation différentielle linéaire *scalaire d'ordre n résolue en $y^{(n)}$* équivaut à un système différentiel d'ordre 1 en dimension n ; par exemple (cf. § **IV**), f est solution de

$$(E) \quad y'' + u(t)\,y' + v(t)\,y = w(t)$$

si et seulement si $t \mapsto \begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \end{pmatrix}$ est solution de

$$(S) \quad X' = A(t)\,X + B(t) \quad \text{où} \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -v(t) & -u(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ w(t) \end{pmatrix}$$

2) Structure de l'ensemble des solutions

Théorème de Cauchy linéaire : soient $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to F$ continues.
Pour tout $(t_0, X_0) \in I \times F$, le *problème de Cauchy*

$$\begin{cases} X' = A(t)\,X + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

admet une unique solution sur I (*dém. hors programme)*.

Corollaire :

1) L'ensemble $\mathcal{S}_I(H)$ des solutions sur I du *système homogène* associé $(H)\ \ X' = A(t)\,X$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, F)$, de dimension n.
Pour tout $t_0 \in I$, l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_I(H) & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ \psi & \mapsto & \psi(t_0) \end{array}$ est un isomorphisme.

2) L'ensemble $\mathcal{S}_I(S)$ des solutions sur I de (S) est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I, F)$, de direction $\mathcal{S}_I(H)$, c'est-à-dire que, pour toute solution "particulière" φ_0 de (S),

$$\mathcal{S}_I(S) = \varphi_0 + \mathcal{S}_I(H) = \{\varphi_0 + \psi,\ \psi \in \mathcal{S}_I(H)\}$$

(on dit que la forme de la *solution générale* de (S) est la somme d'une solution particulière et de la solution générale du système homogène associé).

Définition : on appelle *système fondamental de solutions de* (H) toute base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathcal{S}_I(H)$ et *wronskien* de $(e_1, \ldots, e_n)$ dans une base $\mathcal{B}$ de F l'application

$$W : t \mapsto \det_{\mathcal{B}}\big(e_1(t), \ldots, e_n(t)\big)\,.$$

Caractérisation : soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de n solutions de (H).
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathcal{S}_I(H)$;

2) il existe t_0 dans I tel que $(e_1(t_0), \dots, e_n(t_0))$ soit une base de F ;

3) pour tout t dans I, $(e_1(t), \dots, e_n(t))$ est une base de F.

NB : il en résulte que le wronskien d'une famille de n solutions de (H) est soit toujours soit jamais nul.

Complément hors programme : cela était prévisible car

$$\forall t \in I \quad W'(t) = \mathrm{Tr}\big(A(t)\big).W(t).$$

(Cf. polycop en annexe...)

3) Complément hors programme : méthode de variation des constantes

Théorème : soient $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathcal{S}_I(H)$ et $\varphi : I \to F$ dérivable. Il existe une unique famille $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ d'applications dérivables de I dans $\mathbb{K}$ telle que $\varphi = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j.e_j$ et l'on a l'équivalence :

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j.e_j \in \mathcal{S}_I(S) \Leftrightarrow \forall t \in I \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j'(t).e_j(t) = B(t).$$

On en déduit les $\lambda_j'(t)$ par résolution d'un système de Cramer, puis les λ_j par n calculs de primitives.

Dém. Soient $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base de F, φ_i les applications coordonnées de φ relativement à $\mathcal{B}$ et, pour tout t de I, $M(t) = \big(m_{i,j}(t)\big)$la matrice dans $\mathcal{B}$ du système de vecteurs $(e_1(t), \dots, e_n(t))$:

$$\forall t \in I \quad \varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t).\varepsilon_i \quad \text{et} \quad \forall j \in \mathbb{N}_n \quad e_j(t) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j}(t).\varepsilon_i .$$

Alors, par unicité des coordonnées dans la base $\mathcal{B}$,

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j.e_j \Leftrightarrow \forall t \in I \quad \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix} = M(t) \times \begin{pmatrix} \lambda_1(t) \\ \vdots \\ \lambda_n(t) \end{pmatrix}$$

or $M(t)$ est inversible pour tout t et les coefficients de $M(t)^{-1}$ sont des fonctions dérivables de t (cf. les formules de Cramer ou la formule donnant l'inverse d'une matrice en fonction de sa comatrice !). D'où l'existence et l'unicité de $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. De plus,

$$\varphi' = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j.e_j' + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j'.e_j \quad \text{et} \quad \forall j \quad \forall t \in I \quad e_j'(t) = A(t)\, e_j(t)$$

puisque $e_j \in \mathcal{S}_I(H)$. D'où : $\forall t \in I \quad \varphi'(t) = A(t)\,\varphi(t) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j'(t) \cdot e_j(t)$,

ce qui achève la démonstration.

III - Systèmes linéaires d'ordre 1 à coefficients constants

1) Résultats généraux

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{C}^0(I, F)$; le système différentiel

$$(E) \qquad X' = AX + B(t)$$

ressortit du paragraphe précédent, avec, pour tout t, $A(t) = A$ (A est une application constante de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$!).

On dispose donc des résultats du § **II** : théorème de Cauchy-Lipschitz, structure de l'ensemble des solutions.

Pour la résolution pratique, on peut réduire la matrice A.

2) Cas où A est diagonalisable

Soit $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP = D = \operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. On effectue le changement de fonction inconnue $X = PU$; P étant à coefficients constants, on a

$$X = PU \ ; \ X' = PU' \ ; \ U = P^{-1}X \ ; \ U' = P^{-1}X'$$

d'où :

$$X' = AX + B(t) \Leftrightarrow U' = DU + P^{-1}B(t) \ .$$

On est donc ramené à un système de la forme :

$$\begin{cases} u_1' = \alpha_1 \cdot u_1 + \beta_1(t) \\ \qquad \vdots \\ u_n' = \alpha_n \cdot u_n + \beta_n(t) \end{cases}$$

qui consiste en n équations linéaires scalaires d'ordre 1 (découplées). On en tire U puis $X = PU$.

Espace des solutions du système homogène associé :

Si C_j désigne le j-ième vecteur colonne de la matrice P, on a directement une base de $\mathcal{S}_I(H)$:

$$\mathcal{S}_I(H) = \operatorname{Vect}\left(t \mapsto e^{\alpha_j t} \cdot C_j\right)_{1 \le j \le n}$$

NB : penser à diagonaliser sur $\mathbb{C}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (cf. exemple 2) ci-dessous).

Exemples : 1) $\begin{cases} x' = 5x - 2y + e^t \\ y' = -x + 6y + t \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x + z \end{cases}$.

3) Exemples où A n'est pas diagonalisable

Idée : trigonaliser A (c'est toujours possible sur $\mathbb{C}$) et utiliser le changement de fonction inconnue du paragraphe précédent ; on obtient un système triangulaire qui permet de déterminer de proche en proche les fonctions inconnues, en partant de la dernière équation.

Exemples : 1) (S) $\begin{cases} x' = x + y + \sin t \\ y' = -x + 3y \end{cases}$; 2) (S) $\begin{cases} x' = 2y + 2z \\ y' = -x + 2y + 2z \\ z' = -x + y + 3z \end{cases}$.

4) Amortissement

Lorsque toutes les valeurs propres (éventuellement complexes) de A ont une partie réelle strictement négative, les solutions du système homogène associé admettent toutes 0 pour limite en $+\infty$.

IV - Équations linéaires scalaires d'ordre 2

1) Résultats généraux

Soient a, b, c éléments de $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$ et : $(E) \quad y'' + a(t) \cdot y' + b(t) \cdot y = c(t)$

NB : une équation différentielle de la forme : $\delta(t)\, y'' + \alpha(t)\, y' + \beta(t)\, y = \gamma(t)$ se ramène au cas précédent **sur tout intervalle où** $\delta(t)$ **ne s'annule pas**.

Système différentiel d'ordre 1 associé : f est solution de (E) si et seulement si $t \mapsto \begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \end{pmatrix}$ est solution de

$$(S) \quad X' = A(t)\, X + B(t) \quad \text{où} \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}.$$

Ainsi les résultats du § **II** s'appliquent.

Théorème de Cauchy linéaire : pour tout $(t_0, y_0, y_0') \in I \times \mathbb{K}^2$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + a(t)\, y' + b(t)\, y = c(t) \\ y(t_0) = y_0 \ ; \ y'(t_0) = y_0' \end{cases}$$

admet une unique solution sur I.

Corollaire :

1) L'ensemble $\mathcal{S}_I(H)$ des solutions sur I de $(H) \;\; y'' + a(t)\, y' + b(t)\, y = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$, de dimension 2.

2) L'ensemble $\mathcal{S}_I(E)$ des solutions sur I de (E) est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$, de direction $\mathcal{S}_I(H)$.

Attention ! Contrairement à l'ordre 1, il n'y a pas de méthode générale pour résoudre (H)...

On appelle *système fondamental de solutions de* (H) toute base (φ, ψ) de $\mathcal{S}_I(H)$;

Le *wronskien de* (φ, ψ) est $W : t \mapsto \begin{vmatrix} \varphi(t) & \psi(t) \\ \varphi'(t) & \psi'(t) \end{vmatrix}$; (φ, ψ) est une base de $\mathcal{S}_I(H)$ si et seulement s'il existe t_0 dans I tel que $W(t_0) \neq 0$, ce qui équivaut encore à : $\forall t \in I \quad W(t) \neq 0$.

NB : il est facile de vérifier ici que $W'(t) = -a(t)\, W(t)$.

2) Cas où (H) est à coefficients constants

Soient $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et : $(E) \quad y'' + ay' + by = w(t)$; $\quad (H) \quad y'' + ay' + by = 0$.

Théorème : on connaît une base de l'espace des solutions de (H) en fonction des solutions de l'*équation caractéristique* $(C) \quad r^2 + ar + b = 0$:

- $*$ Si (C) admet deux solutions distinctes α, β dans $\mathbb{K}$, alors
$$\varphi : t \mapsto e^{\alpha t} \quad \text{et} \quad \psi : t \mapsto e^{\beta t} \quad \text{conviennent.}$$
- $*$ Si (C) admet une solution double α dans $\mathbb{K}$, alors
$$\varphi : t \mapsto e^{\alpha t} \quad \text{et} \quad \psi : t \mapsto t.e^{\alpha t} \quad \text{conviennent.}$$
- $*$ Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et (C) admet pour solutions $r \pm i\omega$ dans $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$, alors
$$\varphi : t \mapsto e^{rt}. \cos \omega t \quad \text{et} \quad \psi : t \mapsto e^{rt}. \sin \omega t \quad \text{conviennent.}$$

Obtention d'une solution particulière de (E) :

- Rechercher une solution "évidente" (constante, fonction de forme particulière suggérée par l'énoncé...).
- **Cas où** $w(t) = P(t)\, e^{kt}$, $k \in \mathbb{K}$, $P \in \mathbb{K}[X]$: le changement de fonction inconnue $y = ze^{kt}$ (z est définie par $z = ye^{-kt}$) permet de se ramener à l'équation $z'' + (2k + a)\, z' + \left(k^2 + ak + b\right) z = P$, banale si k est racine double de (C), admettant une unique solution polynomiale de même degré que P si k n'est pas racine de (C) ; si k est racine simple de (C), on obtient z' polynomial de même degré que P. Penser à utiliser des coefficients indéterminés et Re ou Im s'il y a un cos ou un sin au second membre.
- **Principe de superposition des solutions** : même idée qu'au § **I-2)**
- Penser enfin à déterminer et éventuellement reconnaître les solutions développables en série entière.

3) Abaissement de l'ordre

Si φ est **une solution de l'équation homogène** (H) $y'' + a(t)\,y' + b(t)\,y = 0$ ne s'annulant pas sur I, alors le changement de fonction inconnue $y = \varphi z$ transforme (H) (*resp.* (E)) en une équation linéaire scalaire d'ordre 1 en la fonction inconnue z'. On sait alors déterminer z', puis z par un calcul de primitive. Ne pas oublier de multiplier par φ pour obtenir les solutions de (E) !

Dém. Supposons $\varphi'' + a\varphi' + b\varphi = 0$ où φ ne s'annule pas sur I. Soient alors y deux fois dérivable sur I et $z = y/\varphi$; comme φ ne s'annule pas, z est également deux fois dérivable sur I et $y = \varphi z$ d'où

$$y' = \varphi' z + \varphi z' \quad \text{et} \quad y'' = \varphi'' z + 2\varphi' z' + \varphi z''.$$

Par conséquent : $y'' + ay' + by = (2\varphi' + a\varphi)\,z' + \varphi z''$et donc y est solution de (H) (*resp.* (E)) si et seulement si $Z = z'$ vérifie : $\varphi Z' + (2\varphi' + a\varphi)\,Z = 0$ (*resp.* $\varphi Z' + (2\varphi' + a\varphi)\,Z = c$).

NB : si φ s'annule, appliquer cette méthode sur les intervalles où φ ne s'annule pas, puis examiner les possibilités de raccordement.

4) Résolution pratique

a) Recherche des solutions de (H)

Rappelons qu'il n'existe pas de méthode générale, contrairement au cas de l'ordre 1.
Toutefois, dans le cas de coefficients constants, on connaît les solutions.
Sinon, l'énoncé peut suggérer un type particulier de solutions : penser alors à l'abaissement de l'ordre (§ **3**).
En l'absence de suggestion, chercher une solution "évidente" (polynôme, simple fonction usuelle) et en dernier lieu chercher les solutions développables en série entière.

b) Recherche d'une solution particulière de (E)

Chercher avant tout une solution "évidente", penser à la superposition des solutions et à l'abaissement de l'ordre (§ **3**).

Exemples :

1) $y'' - 3y' + 2y = e^t - t - 1$

2) $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2t}}{\sqrt{t^2+1}}$ (penser à l'abaissement de l'ordre)

3) $t\,(1-t)\,y'' + \left(2t^2 - 1\right) y' + 2\,(1-2t)\,y = 0$ (chercher une solution polynomiale)

4) $4xy'' + 2y' - y = 0$ (utiliser le changement de variable $t = \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, $t = \sqrt{-x}$ sur $\mathbb{R}^{-*}$, voir aussi les solutions DSE au chapitre **6**)

5) *Équations d'Euler* : pour a, b dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 y'' + axy' + by = c\,(x)$ se ramène à une équation à coefficients constants grâce au changement de variable $t = \ln|x|$, sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$.
Voir par exemple : $x^2 y'' + 3xy' + y = 0$.

5) Variation des constantes (toujours hors programme !)

Si l'on connaît une base (φ, ψ) de $\mathcal{S}_I\,(H)$, alors on sait résoudre (E)…
Soit f deux fois dérivable sur I ; il existe un unique couple (λ, μ) d'applications dérivables sur I tel que

$$\begin{cases} f = \lambda\varphi + \mu\psi \\ f' = \lambda\varphi' + \mu\psi' \end{cases}$$

et l'on a :

$$f \in \mathcal{S}_I\,(E) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda'\varphi + \mu'\psi = 0 \\ \lambda'\varphi' + \mu'\psi' = c \end{cases}.$$

On détermine donc λ' et μ' par résolution d'un système de Cramer, puis λ et μ par deux calculs de primitives.

V - Notions sur les équations différentielles d'ordre 1 non linéaires (*complément hors programme*)

1) Notations – Définitions

- On considère ici les équations différentielles de la forme $(E) \quad y' = F(x, y)$ où F est une application définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- f est *une solution de* (E) *sur* J, intervalle de $\mathbb{R}$, si et seulement si f est une application de J dans $\mathbb{R}$, dérivable sur J et telle que : $\forall x \in J \quad \big(x, f(x)\big) \in U \quad \text{et} \quad f'(x) = F\big(x, f(x)\big)$.
- f est *une solution maximale de* (E) si et seulement si f est une solution de (E) sur un intervalle J n'admettant aucun prolongement $\widetilde{f}$ à un intervalle $\widetilde{J}$, contenant strictement J, qui soit solution de (E) sur $\widetilde{J}$.
- Les représentations graphiques des solutions maximales sont *les courbes intégrales de* (E).

2) Existence et unicité d'une solution au problème de Cauchy

Théorème de Cauchy

Si $F : U \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, ouvert de $\mathbb{R}^2$, alors, pour tout (x_0, y_0) dans U, le problème de Cauchy $\left\{\begin{array}{l} y' = F(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array}\right.$ admet une unique solution maximale, définie sur un intervalle **ouvert** de $\mathbb{R}$.

Toute solution du même problème de Cauchy en est une restriction.
Les courbes intégrales de (E) forment une partition de U : par tout point (x_0, y_0) de U passe une courbe intégrale et une seule.

Corollaire : si la fonction nulle est solution maximale sur J, alors les solutions maximales non nulles ne s'annulent pas sur J.

3) Exemples

Équations de Bernoulli : de la forme $y' = a(x)\,y + b(x)\,y^\alpha$

Idée : si y ne s'annule pas, diviser par y^α puis poser $z = \dfrac{1}{y^{\alpha-1}}$

Exemple : donner la solution du problème de Cauchy $\left\{\begin{array}{l} y' = y + x^2y^2 \\ y(0) = 1 \end{array}\right.$.

Attention ! Le problème de Cauchy $\left\{\begin{array}{l} y' = 3.y^{2/3} \\ y(1) = 1 \end{array}\right.$ admet une infinité de solutions définies sur $\mathbb{R}$ (la fonction F associée n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$...).

Équations à variables séparables : de la forme $a(y)\,y' = b(x)$

On calcule des primitives A et B de a et b. **Si** y est solution, **alors** $A(y) = B(x) + C^{ste}$ (formellement, on intègre "$a(y)\,\mathrm{d}y = b(x)\,\mathrm{d}x$"...).
On obtient ainsi les *équations cartésiennes* de courbes du plan contenant les courbes intégrales.

NB : si a est de signe constant, A est strictement monotone donc bijective et on obtient

$$y = A^{-1}\left(B(x) + C^{ste}\right).$$

Mais, sinon, une courbe intégrale n'est en général qu'un "morceau" d'une courbe d'équation $A(y) = B(x) + C^{ste}$. Penser notamment au cas où une telle courbe possède plusieurs points ayant la même abscisse...

Exemples :

1) Les *équations autonomes* $y' = G(y)$ sont à variables séparables, sous réserve que $G(y) \neq 0$ (les valeurs de y telles que $G(y) = 0$ correspondent aux solutions constantes...).
Revoir par exemple $y' = 3.y^{2/3}$.

2) Intégrer sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$: $xyy' = y^2 - 1$.

Équations homogènes en x, y : de la forme $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

Le changement de fonction inconnue $t = \frac{y}{x}$ conduit à l'équation **à variables séparables** : $x.t' = \varphi(t) - t$.
Les valeurs de t telles que $\varphi(t) = t$ correspondent aux solutions linéaires, de la forme $x \mapsto tx$ avec t constant. Pour déterminer les autres solutions, la séparation des variables donne

$$\frac{\mathrm{d}t}{\varphi(t) - t} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

qui fournit facilement x en fonction de t et par là même $y = t.x$ également en fonction de t.
On obtient ici une *représentation paramétrique* de courbes du plan contenant les courbes intégrales.

Exemple : étudier le problème de Cauchy $\left\{ \begin{array}{l} 2y + (y - 3x)\, y' = 0 \\ y(1) = 2 \end{array} \right.$.