# 9. Dérivation des fonctions à valeurs vectorielles, arcs paramétrés

Les fonctions étudiées dans ce chapitre sont définies sur un intervalle $I$ (non trivial, c'est-à-dire de longueur strictement positive) de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie $n$ ($n$ entier, $n \geq 2$). On rappelle que les notions de limite, de continuité, de négligeabilité pour les fonctions à valeurs dans $E$ sont indépendantes du choix de la norme dans $E$.

## I - Vecteur dérivé en un point, fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

### 1) Définitions

**Définition :** soit $a$ un point de $I$, on dit que $f$ est *dérivable* en $a$ si et seulement si la fonction

$$h \mapsto \frac{1}{h} \cdot \left[ f(a+h) - f(a) \right]$$

définie sur $(-a+I) \setminus \{0\}$, à valeurs dans $E$, admet une limite finie en 0.
Cette limite est alors appelée *vecteur dérivé* de $f$ en $a$ et est notée $f'(a)$.

**Notations :** $f'(a)$ est aussi noté $\mathrm{D}f(a)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(a)$.

**Théorème et définition :** on dit que $f$ admet un *développement limité à l'ordre* 1 en $a$ si et seulement s'il existe un vecteur $v$ de $E$ tel que :

$$f(a+h) \underset{h \to 0}{=} f(a) + h.v + o(h).$$

Si un tel développement existe, il est unique.

**Théorème :** $f$ est dérivable en $a$ si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en $a$, auquel cas ledit développement s'écrit :

$$f(a+h) \underset{h \to 0}{=} f(a) + h.f'(a) + o(h).$$

**Corollaire :** toute fonction dérivable en $a$ est continue en $a$ (la réciproque est fausse).

**Définition :** soit $a$ un point de $I$ tel que $I'_a = I \cap [a, +\infty[$ (*resp.* $I''_a = I \cap ]-\infty, a]$) ne soit pas réduit au point $a$.
On dit que $f$ est *dérivable à droite* (resp. *à gauche*) en $a$ si et seulement si la restriction de $f$ à $I'_a$ (*resp.* à $I''_a$) est dérivable en $a$.
S'il existe, un tel vecteur dérivé s'appelle *vecteur dérivé à droite* (resp. *à gauche*) de $f$ en $a$ et est notée $f'_d(a)$ (*resp.* $f'_g(a)$).

**Définition :** soit $J$ un intervalle inclus dans $I$.
On dit que $f$ est *dérivable sur* $J$ si, et seulement si, la restriction de $f$ à $J$ est dérivable en tout point de $J$.
Dans ce cas, $f' : J \to E,\ t \mapsto f'(t)$ est appelée *application dérivée* de $f$ sur $J$.

L'application $f'$ est aussi notée $\mathrm{D}f$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$.

**Définition :** on dit que $f$ est *de classe* $\mathcal{C}^1$ sur $I$ si et seulement si $f$ est dérivable sur $I$ et la fonction dérivée $f'$ est continue sur $I$.

On désigne par $\mathcal{C}^1(I, E)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$ à valeurs dans $E$.

### 2) Caractérisation à l'aide des composantes

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$, $f : I \to E$ et $(f_1, \ldots, f_n)$ les fonctions coordonnées de $f$ dans $\mathcal{B}$,

$$\forall x \in I \quad f(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) .e_k .$$

**Théorème :** soit $a \in I$. $f$ est dérivable en $a$ si et seulement si toutes les composantes $f_k$ de $f$ dans la base $\mathcal{B}$ sont dérivables en $a$.
Dans ce cas, $f'(a) = \sum_{k=1}^{n} f'_k(a).e_k$ (autrement dit, les applications coordonnées de $f'$ sont les dérivées des applications coordonnées de $f$).

<u>*Dém.*</u> provient du résultat analogue sur les limites.

**Conséquence :** cas d'une fonction $f$ à valeurs complexes

$$\begin{aligned} f \text{ est dérivable en } a &\Leftrightarrow \operatorname{Re} f \text{ et } \operatorname{Im} f \text{ sont dérivables en } a \\ &\Leftrightarrow \overline{f} \text{ est dérivable en } a. \end{aligned}$$

Dans ce cas, $\mathrm{D}\left(\overline{f}\right) = \overline{\mathrm{D}f}$, $\quad \mathrm{D}f = \mathrm{D}(\operatorname{Re} f) + \mathbf{i}.\mathrm{D}(\operatorname{Im} f)$.

<u>**Exemple**</u> : $f : I \to \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ t \mapsto (a_{ij}(t))$ est dérivable sur $I$ si et seulement si toutes les fonctions $a_{ij}$ sont dérivables sur $I$. Dans ce cas : $\forall t \in I \quad f'(t) = \left(a'_{ij}(t)\right)$.

## 3) Opérations sur les fonctions dérivables

**Théorème :** on désigne par $\mathcal{D}(I,E)$ l'ensemble des fonctions dérivables sur $I$ à valeurs dans $E$.

**1)** Soit $(f,g) \in (\mathcal{D}(I,E))^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Les fonctions $f+g$ et $\lambda f$ sont dérivables sur $I$ et :

$$(f+g)' = f' + g' , \quad (\lambda.f)' = \lambda.f'.$$

**2)** $\mathcal{D}(I,E)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et la dérivation est linéaire de $\mathcal{D}(I,E)$ dans $E^I$.
$\mathcal{C}^1(I,E)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

**3)** Soit $J$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $\varphi \in \mathcal{D}(J,I)$ et $f \in \mathcal{D}(I,E)$, alors

$$f \circ \varphi \text{ est dérivable sur } J \quad \text{et} \quad (f \circ \varphi)' = \varphi'.\left(f' \circ \varphi\right).$$

**4)** Si $\varphi \in \mathcal{C}^1(J,I)$ et $f \in \mathcal{C}^1(I,E)$, alors $f \circ \varphi \in \mathcal{C}^1(J,E)$.

**Théorème :** soit $L$ une application linéaire de $E$ dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $F$.
Si $f \in \mathcal{D}(I,E)$, alors $L \circ f$ est dérivable sur $I$ et $(L \circ f)' = L \circ f'$.
Si, de plus, $f \in \mathcal{C}^1(I,E)$, alors $L \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$.

**Théorème :** soient $E, F, G$ trois $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, $B$ une application bilinéaire de $F \times G$ dans $E$, $f \in \mathcal{D}(I,F)$ et $g \in \mathcal{D}(I,G)$.
L'application $h : t \mapsto B(f(t), g(t))$ de $I$ dans $E$ est dérivable sur $I$ et

$$\forall t \in I \quad h'(t) = B\left(f'(t), g(t)\right) + B\left(f(t), g'(t)\right).$$

**Applications** :

**1)** Si $E$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire et si $f$ et $g$ sont deux éléments de $\mathcal{D}(I,E)$, alors les applications $(f|g)$ et $\|f\|_2^2$ sont dérivables sur $I$ avec

$$(f|g)' = \left(f'|g\right) + \left(f|g'\right) \text{ et } \left(\|f\|_2^2\right)' = 2\left(f|f'\right)$$

($\|.\|_2$ étant la norme associée au produit scalaire).

**2)** Si $E$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire, $f \in \mathcal{D}(I,E)$ et $\forall t \in I, \|f(t)\|_2 = 1$, alors pour tout élément $t$ de $I$, les vecteurs $f(t)$ et $f'(t)$ sont orthogonaux.
En effet, l'application :$t \longmapsto \|f(t)\|_2^2$ est constante (égale à 1) sur $I$, et sa dérivée est nulle sur $I$.

**3)** Si $f \in \mathcal{D}(I,E)$ et $\lambda \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$, alors $\lambda.f \in \mathcal{D}(I,E)$ et $(\lambda.f)' = \lambda'.f + \lambda.f'$.
Si, de plus, $\lambda$ ne s'annule pas sur $I$, alors $\frac{1}{\lambda} \cdot f$ est dérivable sur $I$ et $\left(\frac{1}{\lambda} \cdot f\right)' = \frac{1}{\lambda^2} \cdot \left(\lambda.f' - \lambda'.f\right)$.
(L'application : $\mathbb{R} \times E \to E, (\lambda, x) \mapsto \lambda.x$ est bilinéaire).

**4)** Si $A$ et $B$ sont deux éléments de $\mathcal{D}(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, alors $AB \in \mathcal{D}(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et $(AB)' = A'B + AB'$. (L'application : $(A, B) \mapsto AB$ est bilinéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

**5)** Le résultat se généralise aux applications multilinéaires, notamment au déterminant d'une famille de $n$ vecteurs dans une base : si $\mathcal{B}$ est une base de $E$ et si les $f_k$, $1 \le k \le n$ sont $n$ applications dérivables de $I$ dans $E$, alors

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \det_{\mathcal{B}}\big(f_1(t), \ldots, f_n(t)\big) = \sum_{k=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}\big(f_1(t), \ldots, f_{k-1}(t), f_k'(t), f_{k+1}(t), \ldots, f_n(t)\big).$$

### 4) Inégalité des accroissements finis *(hors programme mais classique)*

Soient $\|\cdot\|$ une norme sur $E$, $f$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et $M \ge 0$ tel que, pour tout point $t$ de $]a, b[$, l'on ait $\|f'(t)\| \le M$, alors

$$\|f(b) - f(a)\| \le M.|b - a|$$

*Dém.* On peut supposer $a < b$. Soit $\varepsilon > 0$, $g : t \mapsto \|f(t) - f(a)\| - (M + \varepsilon)t$ et $u$ fixé dans $]a, b[$. La fonction $g$ est continue sur le segment $[u, b]$, elle admet donc un minimum atteint en un point $c$ de $[u, b]$. Montrons par l'absurde que $c = b$ : supposons un instant $c < b$, alors $f$ est dérivable en $c$ et, par définition de $f'(c)$ et par continuité de la norme, je dispose de $t \in ]c, b[$ (suffisamment proche de $c$) tel que

$$\left\|\frac{1}{t-c} \cdot \big(f(t) - f(c)\big)\right\| - \varepsilon < \|f'(c)\| \le M$$

d'où

$$\|f(t) - f(c)\| < (M + \varepsilon)(t - c)$$

mézalor par l'inégalité triangulaire

$$g(t) \le \|f(t) - f(c)\| + \|f(c) - f(a)\| - (M + \varepsilon)t < g(c)$$

ce qui contredit la définition de $c$. Donc $c = b$ et en particulier $g(b) \le g(u)$, cela pour tout $u$ de $]a, b[$, donc par continuité de $g$ en $a$

$$g(b) \le g(a) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \|f(b) - f(a)\| \le (M + \varepsilon).(b - a)$$

cela pour tout $\varepsilon > 0$, d'où le résultat en faisant tendre $\varepsilon$ vers 0.

*Applications* :

- Si $f$ est continue sur $I$, dérivable sur $\mathring{I}$, $f$ est $k$-lipschitzienne sur $I$ si et seulement si $\|f'\| \le k$ ;
- Si $f$ est continue sur $I$, dérivable sur $\mathring{I}$, $f$ est constante sur $I$ si et seulement si $f'$ est nulle sur $\mathring{I}$.

**Attention !** Les résultats de la forme "il existe $c \in ]a, b[\ldots$" (théorème de Rolle, théorème des accroissements finis,...) **ne subsistent pas** dans le cas des fonctions à valeurs vectorielles. Par exemple, $f : t \mapsto \big(t - t^2, t^2 - t^3\big)$ est dérivable de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}^2$, vérifie $f(0) = f(1)\big(= (0, 0)\big)$ et pourtant $f'$ ne s'annule pas...

## II - Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

### 1) Dérivées successives

**Définition :** on définit par récurrence les dérivées successives de $f$ : $f^{(0)} = f$ et, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on dit que $f$ est *$k$ fois dérivable* si $f^{(k-1)}$ est dérivable sur $I$ et on note $f^{(k)} = \big(f^{(k-1)}\big)'$.
On désigne par $\mathcal{D}^k(I, E)$ l'ensemble des fonctions $k$ fois dérivables sur $I$.

**Notations :** $f^{(k)} = \mathrm{D}^k(f) = \dfrac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}$.

**Définition : a)** Soit $k \in \mathbb{N}$ ; on dit que $f$ est *de classe $\mathcal{C}^k$* sur $I$ si et seulement si $f$ est $k$ fois dérivable sur $I$ et $f^{(k)}$ continue sur $I$.

**b)** $f$ est dite *de classe $\mathcal{C}^\infty$* si et seulement si elle est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k$ de $\mathbb{N}$, autrement dit *indéfiniment dérivable sur $I$*.

**Notations :** $\mathcal{C}^0(I,E)$ : ensemble des fonctions continues sur $I$ à valeurs dans $E$.
$\mathcal{C}^k(I,E)$ : ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I$ à valeurs dans $E$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.
$\mathcal{C}^\infty(I,E)$ : ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $I$ à valeurs dans $E$.

### 2) Opérations algébriques – Structures

**Théorème :** soit $k \in \mathbb{N}$, $f$ et $g$ deux fonctions de $I$ dans $E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
si $f$ et $g$ sont $k$ fois dérivables sur $I$, alors $\lambda.f+g$ est $k$ fois dérivable sur $I$ et :

$$(\lambda.f+g)^{(k)} = \lambda.f^{(k)} + g^{(k)}.$$

$\mathcal{C}^k(I,E)$ et $\mathcal{C}^\infty(I,E)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{C}^0(I,E)$.

**Théorème :** *formule de Leibniz*
Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $f : I \to E$ et $\lambda : I \to \mathbb{R}$.
Si $f$ et $\lambda$ sont $k$ fois dérivables sur $I$, alors $\lambda.f$ est $k$ fois dérivables sur $I$ et

$$(\lambda.f)^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda^{(j)}.f^{(k-j)}.$$

**Théorème :** pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $\mathcal{C}^k(I,\mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre commutative.

**Théorème :** *composée de fonctions de classe* $\mathcal{C}^k$
Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ et $J$ un intervalle de $\mathbb{R}$.
Si $\varphi \in \mathcal{C}^k(J,I)$ et $f \in \mathcal{C}^k(I,E)$, alors $f \circ \varphi \in \mathcal{C}^k(J,E)$.

### 3) Formule de Taylor

Soient $f : I \to E$, $k$ fois dérivable sur $I$, et $t \in I$ ; la formule de Taylor en $t$ pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ fournit des développements limités de toutes les applications coordonnées de $f$ dans une base de $E$, ce qui permet d'écrire

$$f(t+h) \underset{h\to 0}{=} \sum_{j=0}^{k} \frac{h^j}{j!} f^{(j)}(t) + o\left(h^k\right).$$

## III - Arcs paramétrés

### 1) Notion d'arc paramétré

On appelle *arc paramétré* de classe $\mathcal{C}^k$ tout couple $\Gamma = (I,F)$, où $I$ est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $F$ une application de classe $\mathcal{C}^k$ de $I$ dans $E$, $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 ou 3.
On appelle *point de l'arc* $\Gamma = (I,F)$ tout couple $(t,M)$ où $t \in I$ et $M = F(t)$ (dit *point mobile*). On parle aussi du *point de paramètre* $t$. On peut parler du point $M$ ou du point $F(t)$, mais attention aux ambiguïtés en cas de *point multiple* (lorsque le point $M$ est atteint pour plusieurs valeurs de $t$, si $F$ n'est pas injective... )
Le *support de l'arc* est la *courbe* $\mathcal{C} = \{F(t)\ ,\ t \in I\}$ (la *trajectoire* de $F(t)$).
Le point $(t,M)$ est dit *point régulier de l'arc* si et seulement si $F'(t) \neq \vec{0}$, *point birégulier de l'arc* si et seulement si la famille $(F'(t), F''(t))$ est libre.
L'arc est dit *régulier* (resp. *birégulier*) si et seulement si tous ses points le sont.
Un point où $F'(t) = \vec{0}$ est dit *point singulier*, ou encore *point stationnaire*.

### 2) Demi-tangentes – Tangentes

Pour $t \in I$, on suppose l'existence de *l'entier fondamental* $p = \min\left\{n \in \mathbb{N}^* \ /\ F^{(n)}(t) \neq \vec{0}\right\}$.
La formule de Taylor à l'ordre $p$ appliquée à $F$ en $t$ donne : $F(t+h) - F(t) \underset{h\to 0}{=} \dfrac{h^p}{p!} \cdot \left[F^{(p)}(t) + o(1)\right]$.
Or le vecteur $F(t+h) - F(t)$ dirige la demi-droite $\left[F(t)\,F(t+h)\right)$ : pour $t$ fixé et $h$ tendant vers $0^+$ (*resp.* $0^-$), cette demi-droite a donc comme position limite la demi-droite d'origine $F(t)$ dirigée par le vecteur $F^{(p)}(t)$ (*demi-tangente*). Si la limite est identique pour $h$ tendant vers 0 de part et d'autre, on parle de *la tangente à* $\Gamma$ *en* $M = F(t)$.
En pratique, ce vecteur directeur de la tangente peut s'obtenir par calcul des dérivées successives de $F$, ou encore en utilisant l'unicité des développements limités.

### 3) Paramétrages admissibles

Soit $\Gamma = (I, F)$ un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$.
On dit que $\varphi$ est un *changement de paramètre admissible* sur $\Gamma$ si et seulement si $\varphi$ est un $\mathcal{C}^k$*-difféomorphisme* d'un intervalle $J$ de $\mathbb{R}$ dans $I$ (c'est-à-dire que $\varphi$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^k$ de $J$ dans $I$ dont la dérivée ne s'annule pas ; $\varphi^{-1}$ est alors une bijection de classe $\mathcal{C}^k$ de $I$ dans $J$).
Dans ce cas, on dit que l'arc paramétré $(J, G)$, où $G = F \circ \varphi$ est *un paramétrage admissible* de $\Gamma$.
Les deux arcs ont le même support, c'est la *loi horaire* de parcours de la trajectoire qui change.
$(J, G)$ est dit *de même orientation* que $\Gamma$ si et seulement si $\varphi$ est strictement croissante (on dit parfois que l'arc $(J, G)$ est parcouru “dans le sens des $t$ croissants”).

### 4) Caractère géométrique de certaines notions

Soit $(J, G)$ un paramétrage admissible de $\Gamma = (I, F)$, avec $G = F \circ \varphi$.
On vérifie facilement par récurrence que, pour $n \in \mathbb{N}_k$, $t \in I$ et $u \in J$,

$$t = \varphi(u) \Rightarrow \operatorname{Vect}\left(F'(t), F''(t), \ldots, F^{(n)}(t)\right) = \operatorname{Vect}\left(G'(u), G''(u), \ldots, G^{(n)}(u)\right).$$

À tout point $(t, M)$ de $\Gamma$, on associe, s'ils existent, *les entiers fondamentaux* $p, q$ définis par

$$p = \min\left\{n \in \mathbb{N}^* \ / \ F^{(n)}(t) \neq \vec{0}\right\} \quad \text{et} \quad q = \min\left\{n > p \ / \ \left(F^{(p)}(t), F^{(n)}(t)\right) \text{ libre}\right\}.$$

La droite $M + \operatorname{Vect}\left(F^{(p)}(t)\right)$est *la tangente en* $(t, M)$ *à* $\Gamma$ ; si $t = \varphi(u)$, $M = F(t) = G(u)$, $p$ est aussi égal à $\min\left\{n \in \mathbb{N}^* \ / \ G^{(n)}(u) \neq \vec{0}\right\}$ et les droites $M + \operatorname{Vect}\left(F^{(p)}(t)\right)$, $M + \operatorname{Vect}\left(G^{(p)}(u)\right)$ sont confondues : la notion de tangente est indépendante du paramétrage admissible choisi.

De même, dans le cas des courbes planes, pour la classification des points selon les parités de $p, q$ :

- si $p$ est impair, $q$ pair : point *ordinaire* ;
- si $p$ est impair, $q$ impair : point *d'inflexion* ;
- si $p$ est pair, $q$ impair : point *de rebroussement de première espèce* ;
- si $p$ est pair, $q$ pair : point *de rebroussement de seconde espèce.*

De même, bien entendu, pour les notions de point régulier $(p = 1)$, birégulier $(p = 1$ **et** $q = 2)$.

## IV - Courbes planes en coordonnées cartésiennes

Soit $\Gamma = (I, F)$ un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$, $F(t)$ étant caractérisé, pour $t \in I$, par ses coordonnées $\left(x(t), y(t)\right)$ dans un repère cartésien $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ de $E$.

### 1) Utilisation de $m(t) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$

En tout point régulier $(p = 1)$, $F'(t) \left| \begin{array}{l} x'(t) \\ y'(t) \end{array}\right.$ dirige la tangente et donc $m(t)$ est le coefficient directeur de ladite tangente.
En un point stationnaire $(p > 1)$, la formule de Taylor donne

$$x'(t+h) \underset{h \to 0}{=} \frac{h^{p-1}}{(p-1)!} \cdot \left[x^{(p)}(t) + o(1)\right] \quad \text{et} \quad y'(t+h) \underset{h \to 0}{=} \frac{h^{p-1}}{(p-1)!} \cdot \left[y^{(p)}(t) + o(1)\right].$$

Par conséquent, $m(t+h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} \dfrac{y^{(p)}(t)}{x^{(p)}(t)}$ ($\pm\infty$ si $x^{(p)}(t) = 0$, car dans ce cas $y^{(p)}(t) \neq 0$).
Cette limite est encore le coefficient directeur de la tangente au point stationnaire $M = F(t)$. Cette remarque peut rendre service lorsque le quotient $m(t)$ se simplifie.
Remarquons enfin que, lorsque $x'(t) \neq 0$, $m'(t)$ est du signe de $[F'(t), F''(t)] = x'(t)\, y''(t) - x''(t)\, y'(t)$ : son annulation est une condition nécessaire et suffisante pour que $F(t)$ ne soit pas birégulier. C'est en particulier une condition nécessaire pour que $F(t)$ soit un point d'inflexion.

## 2) Branches infinies

Soit $t_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, adhérent à $I$.

### a) Asymptote parallèle à l'un des axes

Si $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = a$ et $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty$, $\Gamma$ admet l'asymptote d'équation $x = a$ (position $\leftarrow \operatorname{sgn}(x(t) - a)$).

Si $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = b$ et $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty$, $\Gamma$ admet l'asymptote d'équation $y = b$ (position $\leftarrow \operatorname{sgn}(y(t) - b)$).

### b) Recherche d'une asymptote "oblique"

**Attention !** L'étude suivante n'a lieu d'être **que si** $x(t) \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} \pm\infty$ **et** $y(t) \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} \pm\infty$ !

- Si $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$, $\Gamma$ admet une **branche parabolique de direction asymptotique** $Oy$.
- Si $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 0$, $\Gamma$ admet une **branche parabolique de direction asymptotique** $Ox$.
- Si $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = a \in \mathbb{R}^*$, $\Gamma$ admet une branche infinie avec direction asymptotique d'équation $y = ax$.
  - $*$ Si en outre $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) - a\cdot x(t) = \pm\infty$, $\Gamma$ admet une **branche parabolique de direction asymptotique d'équation** $y = ax$.
  - $*$ Si en outre $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) - a\cdot x(t) = b \in \mathbb{R}$, $\Gamma$ admet **l'asymptote d'équation** $y = ax + b$. La position de la courbe par rapport à cette asymptote s'obtient par l'étude du signe de $y(t) - ax(t) - b$, éventuellement par l'entremise d'un développement limité.

## 3) Points multiples

Pour améliorer la qualité du tracé, il est souhaitable de préciser — s'il en existe — les *points doubles* : chercher $t$ et $t'$ distincts dans $I$ tels que $\begin{cases} x(t) = x(t') \\ y(t) = y(t') \end{cases}$.

## 4) Plan d'étude globale

- Penser à restreindre si possible l'intervalle d'étude (arguments de périodicité, parité, symétrie,...). Commencer par réduire l'**amplitude** de l'intervalle, avant de le "couper en deux" après avoir fixé son centre.
- Étudier les variations des deux fonctions $x$ et $y$.
- Préciser la nature des points stationnaires, les tangentes en ces points et la position de la courbe par rapport à ces tangentes.
- Préciser les branches infinies et la position de la courbe par rapport aux asymptotes éventuelles.
- Ébaucher le tracé de la courbe.
- *Options* : points doubles, points d'inflexion.

*Exemples*:

**a**) *Astroïde :* $\begin{cases} x(t) = a\cos^3 t \\ y(t) = a\sin^3 t \end{cases}$ ; **b**) $\begin{cases} x(t) = 2t + \dfrac{1}{t^2} \\ y(t) = t^2 + \dfrac{1}{t^2} \end{cases}$

**c**) *Cardioïde :* $\begin{cases} x(t) = a(2\cos t + \cos 2t) \\ y(t) = a(2\sin t + \sin 2t) \end{cases}$

# V - Longueur d'un arc de classe $\mathcal{C}^1$

## 1) Définition

Soit $\Gamma = ([a,b], F)$ un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$ (où $a < b$).
$E$ est muni d'une norme $\|\cdot\|$.
La *longueur* de $\Gamma$ (relativement à $\|\cdot\|$) est

$$\ell(\Gamma) = \int_a^b \left\|F'(t)\right\| \mathrm{d}t.$$

## 2) Exemples avec la norme euclidienne canonique

- dans le plan : ellipse : $t \mapsto (a\cos t, b\sin t)$ ; cardioïde : $t \mapsto (2\cos t + \cos 2t, 2\sin t + \sin 2t)$
- dans l'espace : hélice circulaire : $t \mapsto \left(r\cos t, r\sin t, \dfrac{p}{2\pi} \cdot t\right)$

# VI - Enveloppe d'une famille de droites *(complément hors programme)*

Étant donnée une famille de droites $(D_t)_{t\in I}$ d'un plan, on cherche une courbe tangente à chacune des $D_t$ , $t \in I$. Si chaque $D_t$ est donnée par une équation cartésienne dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

$$D_t \ / \ u(t)\,x + v(t)\,y + w(t) = 0,$$

on cherche un arc $\Gamma$ paramétré par $F : t \mapsto (x(t), y(t))$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$, telle que, pour tout $t$ dans $I$, $D_t$ soit la tangente à $\Gamma$ en $F(t)$ ; on en déduit la *condition nécessaire* :

$$\forall t \in I \quad \left\{\begin{array}{ll} u(t)\,x(t) + v(t)\,y(t) + w(t) = 0 & (1) \\ u(t)\,x'(t) + v(t)\,y'(t) = 0 & (2) \end{array}\right. .$$

(L'égalité (1) traduit le fait que $F(t)$ est un point de $D_t$ , l'égalité (2) le fait que le vecteur $F'(t)$ appartient à la direction de $D_t$ : si $F'(t)$ n'est pas le vecteur nul, ces deux égalités montrent réciproquement que $D_t$ est la tangente à $\Gamma$ au point $F(t)$.)

Dans le cas particulier où les fonctions $u, v, w$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$, on obtient, en dérivant (1) et en retranchant (2), la nouvelle condition nécessaire :

$$\forall t \in I \quad \left\{\begin{array}{ll} u(t)\,x(t) + v(t)\,y(t) + w(t) = 0 & (E_t) \\ u'(t)\,x(t) + v'(t)\,y(t) + w'(t) = 0 & (E'_t) \end{array}\right. .$$

Si en outre, $uv' - u'v$ ne s'annule pas sur $I$, on en déduit $(x(t), y(t))$ par résolution d'un système de Cramer. Dans ce cas favorable, les fonctions $x, y$ ainsi définies sont de classe $\mathcal{C}^1$ (cf. les formules de Cramer) et *en tout point régulier de l'arc paramétré par* $F : t \mapsto (x(t), y(t))$, $D_t$ *est la tangente à* $\Gamma$ *au point* $F(t)$ ! (On obtient (2) en dérivant $(E_t)$ et en retranchant $(E'_t)$ ...)

*Exemple* : enveloppe de la famille des droites $(AB)$ où $A$ sur l'axe $Ox$ et $B$ sur l'axe $Oy$ vérifient $AB = a$ constante positive donnée (cf. une échelle glissant le long d'un mur).