8. Espaces préhilbertiens réels et euclidiens

I - Espaces préhilbertiens réels

1) Produit scalaire – Norme associée

Rappelons que, si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on appelle *produit scalaire sur* E toute forme bilinéaire symétrique définie positive sur E, c'est-à-dire toute application $(u,v) \mapsto (u|v)$ de E^2 dans $\mathbb{R}$, notée $(\cdot|\cdot)$ vérifiant :

- $\forall\,(u,v) \in E^2 \quad (v|u) = (u|v)$ *(symétrie)*
- $\forall\,(u,u',v) \in E^3 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (\lambda.u + u'|v) = \lambda\,(u|v) + (u'|v)$ *(linéarité à gauche)*
- $\forall u \in E \quad (u|u) \geq 0 \quad$ et $\quad \big((u|u) = 0 \Rightarrow u = 0\big)$

NB : le produit scalaire, noté ici $(u|v)$, est parfois noté $\langle u, v\rangle$ ou encore $u \cdot v$ s'il n'y a pas risque de confusion avec une multiplication interne (cf. les espaces de fonctions, de matrices...)

Définition : le couple $\big(E, (\cdot|\cdot)\big)$ est *un espace préhilbertien réel.* S'il n'y a pas d'ambiguïté sur le choix du produit scalaire, on parle de l'espace préhilbertien réel E.
Un *espace euclidien* est un espace préhilbertien réel de dimension finie.

Théorème : si E est un espace préhilbertien réel, l'application $u \mapsto \|u\| = \sqrt{(u|u)}$ est une norme sur E, *la norme euclidienne associée au produit scalaire* $(\cdot|\cdot)$ et l'on a *l'inégalité de Cauchy-Schwarz :*

$$|(u|v)| \leq \|u\| \cdot \|v\| \quad \text{(avec égalité si et seulement si } u, v \text{ colinéaires).}$$

Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire : $\|u+v\| = \|u\| + \|v\|$ si et seulement si u et v sont sur une même demi-droite, c'est-à-dire si et seulement si $u = 0$ ou il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $v = \lambda.u$.

Nous disposons en outre, pour tout (u,v) de E^2, des développements :

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\,(u|v) \quad \text{et} \quad \|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\,(u|v)$$

qui fournissent l'*identité du parallélogramme :*

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$$

et les *identités de polarisation :*

$$(u|v) = \frac{1}{2}\left[\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right] = \frac{1}{2}\left[\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u-v\|^2\right] = \frac{1}{4}\left[\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right]$$

où l'on voit que les valeurs prises par le produit scalaire sont entièrement déterminées par les valeurs prises par la norme euclidienne associée. Ainsi, une norme **euclidienne** étant donnée, il y a un **unique** produit scalaire auquel est est associée. Mais attention ! Il existe des normes sur E qui ne sont pas des normes euclidiennes...

2) Orthogonalité

Définitions : soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, muni d'un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ et $\|\cdot\|$ la norme associée.

- Un vecteur u de E est dit *unitaire* (ou *normé*) si et seulement s'il est de norme 1.
- Deux vecteurs u, v de E sont dits *orthogonaux* si et seulement si $(u|v) = 0$.
- Une famille $(u_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est dite *orthogonale* si et seulement si les u_i sont orthogonaux deux à deux :
$$\forall\,(i,j) \in I^2 \quad i \neq j \Rightarrow (u_i|u_j) = 0\ .$$
- Une famille $(u_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est dite *orthonormale* (ou *orthonormée*) si et seulement si les u_i sont unitaires et orthogonaux deux à deux :
$$\forall\,(i,j) \in I^2 \quad (u_i|u_j) = \delta_{i,j}\ .$$

- Si F est un sous-espace vectoriel de E, un vecteur u est dit *orthogonal à* F si et seulement si u est orthogonal à tous les vecteurs de F ; on appelle *orthogonal de* F l'ensemble, noté $F^\perp$ (ou F^o), des vecteurs de E orthogonaux à F :
$$F^\perp = \{u \in E \ / \ \forall v \in F \quad (u|v) = 0\}$$
- Deux sous-espaces F et G de E sont dits *orthogonaux* si et seulement si tout vecteur de l'un est orthogonal à tout vecteur de l'autre (*i.e.* $\forall (v, w) \in F \times G \quad (v|w) = 0$).

NB : F et G sont dits *perpendiculaires* si et seulement si $F^\perp$ et $G^\perp$ sont orthogonaux (en dimension 3, deux plans ne sont jamais orthogonaux !).

Propriétés :

1) Toute famille orthogonale de vecteurs **non nuls** est libre.

2) Toute famille orthonormale est libre.

3) Si F, G sont deux sous-espaces de E :
- $*$ $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E et $F \cap F^\perp = \{0\}$;
- $*$ $F \subset F^{\perp\perp}$;
- $*$ $F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$;
- $*$ F, G orthogonaux $\Leftrightarrow F \subset G^\perp \Leftrightarrow G \subset F^\perp$.

4) Des sous-espaces vectoriels orthogonaux deux à deux sont en somme directe.

Attention ! Si F est de dimension infinie, on peut avoir $F \subsetneq F^{\perp\perp}$ et F et $F^\perp$ ne sont pas toujours supplémentaires. Pour F de dimension finie, voir **§5**.
Cf. $F = \mathbb{R}[X]$ dans $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f, g) \mapsto \displaystyle\int_0^1 f.g$; le théorème de Weierstrass (hors programme) donne $F^\perp = \{0\}$ et donc $F^{\perp\perp} = E$.

Théorème de Pythagore : u et v sont orthogonaux si et seulement si : $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

NB : par récurrence, on obtient, pour $(u_i)_{i \in I}$ famille orthogonale finie : $\left\| \sum\limits_{i \in I} u_i \right\|^2 = \sum\limits_{i \in I} \|u_i\|^2$.

3) Exemples de référence

a) Produit scalaire associé à une base

Si $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, alors l'application
$$(u, v) \mapsto (u|v) = \sum_{i \in I} x_i y_i \quad \text{si} \quad u = \sum_{i \in I} x_i.e_i \quad \text{et} \quad v = \sum_{i \in I} y_i.e_i$$
est clairement un produit scalaire sur E (par définition d'une base, il y a un nombre fini de coordonnées non nulles pour chaque vecteur, il s'agit donc de sommes finies, même si I est infini... Cf. $\mathcal{B} = (X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}[X]$).
$(\cdot|\cdot)$ est l'unique produit scalaire sur E pour lequel $\mathcal{B}$ est une base orthonormale.

b) Produits scalaires canoniques

Dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une *base canonique*, le produit scalaire qui lui est associé comme ci-dessus est appelé *produit scalaire canonique* :

- dans $\mathbb{R}^n$, si $u = (x_1, \ldots, x_n)$ et $v = (y_1, \ldots, y_n)$, $(u|v) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k$
- dans $\mathbb{R}[X]$, si $P = \sum\limits_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k$ et $Q = \sum\limits_{k \in \mathbb{N}} b_k X^k$, $(P|Q) = \sum\limits_{k \in \mathbb{N}} a_k b_k$
- dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$, $(A|B) = \sum\limits_{i,j} a_{i,j} b_{i,j} = \mathrm{Tr}\left({}^t AB\right) = \mathrm{Tr}\left(A^t B\right)$.

Propriété : dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique, les sous-espaces formés par les matrices symétriques et antisymétriques sont supplémentaires et orthogonaux.

c) Espaces L^2

Cf. le chapitre **7-§ IV-2**... Lorsque I est un segment $[a,b]$, l'espace $L_c^2(I,\mathbb{R})$ des fonctions continues de carré intégrable sur I n'est autre que $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

Dans ces deux espaces, $(f,g) \mapsto \displaystyle\int_I fg$ définit un produit scalaire.

4) Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Théorème : soient $(e_1,\ldots,e_n)$ une famille libre de vecteurs de E et les sous-espaces associés :

$$\forall k \in [\![1,n]\!] \quad F_k = \mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_k).$$

Il existe une unique famille orthonormale $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ de vecteurs de E telle que :

$$\forall k \in [\![1,n]\!] \quad \mathrm{Vect}(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k) = F_k \quad \text{et} \quad (\varepsilon_k|e_k) \in \mathbb{R}^{+*}. \tag{1}$$

De plus :

$$\forall k \in [\![1,n]\!] \quad \varepsilon_k = \frac{1}{\|v_k\|}\cdot v_k \quad \text{où} \quad v_k = e_k - \sum_{j=1}^{k-1}\frac{(v_j|e_k)}{(v_j|v_j)}\cdot v_j = e_k - \sum_{j=1}^{k-1}(\varepsilon_j|e_k).\varepsilon_j \qquad (v_1 = e_1) \tag{2}$$

<u>*Dém.*</u> <u>*Existence*</u> : (2) définit bien par récurrence les familles (v_k) et (ε_k) ($v_k \neq 0$ car $e_k \notin F_{k-1}$, la famille $(e_1,\ldots,e_n)$ étant libre par hypothèse) ; il est aisé de vérifier que la famille (ε_k) ainsi obtenue convient.

<u>*Unicité*</u> : supposons deux familles $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ et $(\varepsilon'_1,\ldots,\varepsilon'_n)$ vérifiant (1). Je montre par récurrence sur k que $\mathcal{P}_k : (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k) = (\varepsilon'_1,\ldots,\varepsilon'_k)$ est vrai pour tout k de $[\![1,n]\!]$:

- $\mathcal{P}_1$ est vrai : ε_1 et ε'_1 sont sur la droite $F_1 = \mathrm{Vect}(e_1)$, unitaires donc égaux ou opposés ; or $(\varepsilon_1|e_1)$, $(\varepsilon'_1|e_1)$ sont de même signe, d'où $\varepsilon_1 = \varepsilon'_1$;
- supposons $k \geq 2$ tel que $\mathcal{P}_{k-1}$ soit vrai ; alors ε_k et ε'_k sont sur la normale à l'hyperplan F_{k-1} de l'espace F_k, unitaires donc égaux ou opposés ; or $(\varepsilon_k|e_k)$, $(\varepsilon'_k|e_k)$ sont de même signe, d'où $\varepsilon_k = \varepsilon'_k$, ce qui achève la récurrence.

Pour retrouver (si besoin...) les coefficients de l'expression de v_k, il suffit de chercher v_k sous la forme

$$v_k = e_k + \sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i.v_i$$

et d'écrire la condition $(v_j|v_k) = 0$ pour obtenir directement λ_j, pour tout j de $[\![1,k-1]\!]$.
Noter l'astuce qui consiste à utiliser une combinaison linéaire des v_i (obtenus de proche en proche...).
Une combinaison linéaire des e_i conduirait à un système de $k-1$ équations couplées.

NB : en pratique, on détermine la famille orthogonale $(v_1,\ldots,v_n)$, puis on normalise si nécessaire ; le résultat peut être étendu à une *suite* de vecteurs (par exemple dans $\mathbb{R}[X]$).

<u>*Exemple*</u> : dans $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $(P,Q) \mapsto \int_{-1}^{1} PQ$, l'orthogonalisation la famille $(1,X,X^2,X^3)$ donne $\left(1,X,X^2-\dfrac{1}{3},X^3-\dfrac{3}{5}X\right)$ (cf. les *polynômes de Legendre :* $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]$).

Corollaire : tout espace préhilbertien de dimension finie admet des bases orthonormales.

5) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Théorème et définition : soient E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace *de dimension finie* de E ; l'orthogonal $F^\perp$ de F est un supplémentaire de F, appelé *le supplémentaire orthogonal de* F ; la projection p_F de E sur F parallèlement à $F^\perp$ est *la projection orthogonale sur* F.
En outre, si $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ est une base <u>**orthonormale**</u> de F, on a :

$$\forall u \in E \quad p_F(u) = \sum_{j=1}^{n}(\varepsilon_j|u).\varepsilon_j$$

Enfin, $F^{\perp\perp} = F$ et $\mathrm{Id}_E - p_F$ est la projection orthogonale sur $F^\perp$.

NB : $v = p_F(u)$ est caractérisé par $\left(v \in F \quad \text{et} \quad u - v \in F^\perp\right)$ avec en outre, si $F = \operatorname{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$,

$$w \in F^\perp \Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}_n \quad (\varepsilon_i | w) = 0\ ;$$

si l'on écrit $v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j . \varepsilon_j$, ces conditions redonnent les valeurs des λ_j, immédiatement si $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ est une base orthonormale (à la rigueur orthogonale) de F, au prix de la résolution d'un système de n équations à n inconnues sinon.

On remarquera que, dans l'algorithme de Schmidt, avec les notations du paragraphe précédent,

$$v_k = e_k - p_{F_{k-1}}(e_k)\,.$$

<u>*Dém. du théorème*</u> Fixons une base orthonormale $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de F (il en existe d'après le paragraphe précédent !). Compte tenu de la remarque précédente, il est facile de vérifier que, pour tout u de E, en posant

$$v = \sum_{j=1}^{n} (\varepsilon_j | u) . \varepsilon_j \quad \text{et} \quad w = u - v,$$

j'ai $u = v + w$ avec $v \in F$ et $w \in F^\perp$; il en résulte que $E = F + F^\perp$, or je sais déjà que $F \cap F^\perp = \{0\}$, donc $F^\perp$ est bien un supplémentaire de F et l'expression de $v = p_F(u)$ est déjà apparue.
Je sais déjà que $F \subset F^{\perp\perp}$. Posons $G = F^\perp$; j'ai $F \subset G^\perp$, il reste à prouver que $G^\perp \subset F$. Soit donc $u \in G^\perp$ et $v = p_F(u)$; v est dans F, donc dans $G^\perp$; ainsi $w = u - v \in G \cap G^\perp$, donc $w = 0$ et il en résulte que $u = v$ d'où $u \in F$.

Corollaire : *distance d'un point à un sous-espace F de dimension finie.*
Soit $u \in E$, l'application de F dans $\mathbb{R}$ qui à $s \in F$ associe $\|u - s\|$ atteint son minimum $d(u, F)$ en un point et un seul, à savoir $p_F(u)$. On a :

$$d(u, F) = \|u - p_F(u)\| \quad \text{et} \quad d(u, F)^2 = \big(u | u - p_F(u)\big) = \|u\|^2 - \|p_F(u)\|^2\,.$$

<u>*Dém.*</u> Soient $v = p_F(u)$ et $w = u - v$; pour tout s de F, $u - s = (v - s) + w$ avec $v - s$ et w orthogonaux. J'ai donc, grâce au théorème de Pythagore :

$$\|u - s\|^2 = \|v - s\|^2 + \|w\|^2\ ;$$

le minimum est $\|w\|^2$, atteint pour $s = v$ (et seulement en ce point) ; enfin, $u - v$ étant orthogonal à v,

$$\|w\|^2 = (u - v | u - v) = (u | u - v)$$

et $\|u\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$ pour $u = 0$ dans la relation ci-dessus.

<u>*Inégalité de Bessel*</u> : si $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ est une famille orthonormale, alors

$$\forall u \in E \quad \sum_{j=1}^{n} (\varepsilon_j | u)^2 \leq \|u\|^2$$

(et donc, si (ε_j) est une *suite orthonormale*, la série $\sum (\varepsilon_j | u)^2$ est convergente).

<u>*Exemples*</u> :

1) Soient a un vecteur non nul de E, $D = \operatorname{Vect}(a)$ et $H = D^\perp$; on a, pour $u \in E$

$$p_D(u) = \frac{(a|u)}{\|a\|^2} \cdot a \quad ; \quad d(u, H) = \frac{|(a|u)|}{\|a\|} \quad ; \quad d(u, D) = \left(\|u\|^2 - \frac{(a|u)^2}{\|a\|^2}\right)^{1/2}$$

2) Déterminer $\displaystyle\inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_0^{+\infty} \left[x^3 - \left(ax^2 + bx + c\right)\right]^2 e^{-x} \mathrm{d}x$

(*idée* : se placer dans $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $(P, Q) \mapsto (P|Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(x)\, Q(x)\, e^{-x} \mathrm{d}x$; on cherche $d\left(X^3, \mathbb{R}_2[X]\right)^2 \ldots$)

II - Espaces euclidiens

1) Bases orthonormales – Supplémentaire orthogonal

Rappel : on appelle *espace vectoriel euclidien* tout espace préhilbertien réel de dimension finie.

Propriétés : soit E un espace vectoriel euclidien :

- $*$ E possède des bases orthonormales ;
- $*$ pour tout sous-espace vectoriel F de E,
$$F \oplus F^{\perp} = E \ ; \quad \dim F^{\perp} = \dim E - \dim F \ ; \quad F^{\perp\perp} = F \ ;$$
- $*$ toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale de E.

Dém. Les deux premières assertions découlent immédiatement du paragraphe précédent ; pour la troisième, choisir une base orthonormale de l'orthogonal du sous-espace engendré par la famille initiale.

2) Écritures matricielles et expressions analytiques dans une b.o.n.

Soient E un espace vectoriel euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

- Si $u = \sum_{i=1}^{n} x_i.e_i$ et $v = \sum_{j=1}^{n} y_j.e_j$, alors, par bilinéarité :
$$(u|v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i y_j \quad \text{où} \quad a_{i,j} = (e_i|e_j)\,.$$
Ainsi, en notant A la matrice $A = (a_{i,j})$, et en identifiant $\mathbb{R}$ et $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$:
$$(u|v) = {}^tXAY \quad \text{et} \quad \|u\|^2 = {}^tXAX \quad \text{où} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \ , \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$
A est *la matrice du produit scalaire dans la base* $\mathcal{B}$.
$\mathcal{B}$ est orthonormale si et seulement si $A = I_n$.

Si $\mathcal{B}$ est une base **orthonormale** :

- la famille $(x_k)_{1 \le k \le n}$ des coordonnées dans $\mathcal{B}$ de $u \in E$ est donnée par : $\forall k \quad x_k = (e_k|u)$;
- si $u = \sum_{k=1}^{n} x_k.e_k$ et $v = \sum_{k=1}^{n} y_k.e_k$, alors $(u|v) = {}^tXY = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ et $\|u\| = \sqrt{{}^tXX} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$;
- si $f \in \mathcal{L}(E)$, la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est $\big((e_i|f(e_j))\big)_{1 \le i,j \le n}$
(en effet, $(e_i|f(e_j))$ est la i-ième coordonnée de $f(e_j)$ dans $\mathcal{B}$!).

3) Isomorphisme canonique d'un espace vectoriel euclidien avec son dual

Pour tout espace vectoriel E, on note E^* l'espace des formes linéaires sur E, appelé *le dual de* E.

Théorème : soit E un espace vectoriel euclidien ; l'application
$$\begin{array}{rccl} \Phi : & E & \to & E^* \\ & a & \mapsto & \varphi_a : u \mapsto (a|u) \end{array}$$
est un isomorphisme. En particulier,
$$\forall \varphi \in E^* \quad \exists! a \in E \quad \forall u \in E \quad \varphi(u) = (a|u)\,.$$

Dém. Φ est linéaire de E dans E^*, injective et $\dim E = \dim E^*$.

Normale à un hyperplan : soit φ une forme linéaire non nulle sur E et H l'hyperplan $\operatorname{Ker}\varphi$; le vecteur a de E tel que $\varphi(u) = (a|u)$ est *un vecteur normal* à H, il engendre *la normale à* H (la droite $H^{\perp}$).

III - Endomorphismes symétriques

Dans cette section, E désigne un espace vectoriel euclidien.

Définition : $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit *symétrique* si et seulement si

$$\forall (u,v) \in E^2 \quad (f(u)\,|v) = (u|f(v))\,.$$

Caractérisation : soit $f \in \mathcal{L}(E)$; les assertions suivantes sont équivalentes :

a) f est symétrique ;

b) la matrice de f dans une (toute) base orthonormale est symétrique.

Propriétés : 1) L'ensemble des endomorphismes symétriques de E est un sous-espace de $\mathcal{L}(E)$, isomorphe au sous-espace des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

2) $p \in \mathcal{L}(E)$ est une projection orthogonale si et seulement si

$$p^2 = p \quad \text{et} \quad p \text{ est symétrique.}$$

Dém. 1) Fixer une base orthonormale de E...

2) $\boxed{\Rightarrow}$: soit F sous-espace de E et $p = p_F$: p est un projecteur donc $p^2 = p$ et, dans une base orthonormale adaptée à la décomposition $E = F \oplus F^\perp$, p a pour matrice $A = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $k = \dim F$. A est symétrique, donc p est symétrique.

$\boxed{\Leftarrow}$: soit $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p = p^2$ et p symétrique ; p est un projecteur, soient donc $F = \operatorname{Im} p$ et $G = \operatorname{Ker} p$; j'ai

$$\forall (u,v) \in F \times G \quad (u|v) = (p(u)\,|v) = (u|p(v)) = 0$$

donc $G \subset F^\perp$ d'où, compte tenu des dimensions, $G = F^\perp$; p est donc la projection orthogonale sur F.

Exercice : on définit de même les *endomorphismes antisymétriques*, caractérisés par les assertions équivalentes suivantes, pour $f \in \mathcal{L}(E)$:

1) $\forall (u,v) \in E^2 \quad (f(u)\,|v) = -(u|f(v))$

2) $\forall u \in E \quad (f(u)\,|u) = 0$

3) la matrice de f dans une (toute) base orthonormale est antisymétrique.

Exemple : dans E espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, les endomorphismes antisymétriques sont les $f_{\vec{a}} : \vec{u} \mapsto \vec{a} \wedge \vec{u}$; si $\vec{a}$ a pour coordonnées (α, β, γ) dans une base orthonormale directe $\mathcal{B}$, alors

$$M_{\mathcal{B}}(f_{\vec{a}}) = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma} & 0 & -\alpha \\ -\beta & \boldsymbol{\alpha} & 0 \end{pmatrix}.$$

L'application $\vec{a} \mapsto f_{\vec{a}}$ est un isomorphisme de E dans le sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ formé des endomorphismes antisymétriques.

IV - Automorphismes orthogonaux, matrices orthogonales

Dans cette section, E désigne un espace vectoriel euclidien.

1) Automorphismes orthogonaux

Définition : $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit *automorphisme orthogonal* (ou *isométrie vectorielle*) de E si et seulement si f *conserve le produit scalaire*, c'est-à-dire

$$\forall (u,v) \in E^2 \quad (f(u)\,|f(v)) = (u|v)$$

(si c'est le cas, $f \in GL(E)$, puisque $f(u) = 0 \Rightarrow u = 0$).

Caractérisation : soit $f \in \mathcal{L}(E)$; les assertions suivantes sont équivalentes.

a) f est un automorphisme orthogonal de E ;

b) f conserve le produit scalaire : $\forall (u,v) \in E^2 \quad (f(u)\,|f(v)) = (u|v)$;

c) f conserve la norme : $\forall u \in E \quad \|f(u)\| = \|u\|$;

d) f transforme une (toute) base orthonormale en base orthonormale.

Dém. Pour la seule implication non triviale $\boxed{\text{c)} \Rightarrow \text{b)}}$, utiliser une *identité de polarisation*, par exemple

$$(f(u)\,|\,f(v)) = \frac{1}{2}\left(\|f(u)+f(v)\|^2 - \|f(u)\|^2 - \|f(v)\|^2\right),$$

puis la linéarité de f...

Propriétés : **1)** L'ensemble des automorphismes orthogonaux de E est un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$, appelé *groupe orthogonal de E* et noté $O(E)$.
2) Si $f \in O(E)$, alors $\det f = \pm 1$ et $\operatorname{Sp} f \subset \{-1, 1\}$.

Corollaire : les isométries d'une droite vectorielle D sont Id_D et $-\mathrm{Id}_D$.

Définition : **1)** Les automorphismes orthogonaux de E de déterminant $+1$ sont *les rotations de E* ; elles forment un sous-groupe de $O(E)$, appelé *groupe spécial orthogonal de E* et noté $SO(E)$.

2) Les symétries orthogonales par rapport à un hyperplan sont *les réflexions de E* (le déterminant d'une réflexion vaut -1).

Propriété : dans E espace vectoriel euclidien orienté, les rotations sont les endomorphismes qui transforment une (toute) base orthonormale directe en base orthonormale directe.

2) Matrices orthogonales

Définition : $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *une matrice orthogonale* si et seulement si l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M est un automorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^n$ (muni du produit scalaire canonique).

Propriété : l'ensemble des matrices orthogonales est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$, le *groupe orthogonal* $O_n(\mathbb{R})$ (noté aussi $O(n)$), isomorphe à $O(\mathbb{R}^n)$. L'ensemble $SO_n(\mathbb{R})$ (noté aussi $SO(n)$) des matrices de rotation de $\mathbb{R}^n$ est un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$, isomorphe à $SO(\mathbb{R}^n)$.

Caractérisation : on retrouve les caractérisations des automorphismes orthogonaux de $\mathbb{R}^n$ et, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les assertions suivantes sont équivalentes :
a) M est une matrice orthogonale ;
b) ${}^tM \times M = I_n$; **c)** $M \times {}^tM = I_n$; **d)** M inversible et $M^{-1} = {}^tM$;
e) ${}^tM$ est une matrice orthogonale ;
f) Les vecteurs colonnes de M forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$;
g) Les vecteurs lignes de M forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

Dém. Remarquer que, si les C_j désignent les vecteurs colonnes de M, alors la *matrice de Gram* ${}^tM \times M$ est remplie par les produits scalaires (produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$) :

$${}^tM \times M = \left((C_i|C_j)\right)_{1\le i,j\le n}.$$

De même $M \times {}^tM$ contient les produits scalaires des vecteurs lignes.

Propriétés : 1) Soient $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E et $\mathcal{B}'$ une base de E. $\mathcal{B}'$ est une base orthonormale si et seulement si la matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est une matrice orthogonale.

2) Si $M \in O_n(\mathbb{R})$, alors $\det M = \pm 1$, $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}} M \subset \mathbb{U}$ et $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}} M \subset \{-1, 1\}$.

Exemple fondamental : soient $\vec{a}$ un vecteur **unitaire** de E et $C = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ le vecteur colonne de ses coordonnées dans une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$; la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale sur la droite $\operatorname{Vect}\vec{a}$ est

$$P = C\,{}^tC = (a_i a_j)_{1\le i,j\le n}.$$

On en déduit immédiatement :

1) la matrice de la projection orthogonale sur l'hyperplan $(\operatorname{Vect}\vec{a})^\perp$: $I_n - P$

2) la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\operatorname{Vect}\vec{a}$: $2P - I_n$

3) la matrice de la réflexion d'hyperplan $(\operatorname{Vect}\vec{a})^\perp$: $I_n - 2P$.

3) Produit mixte – Produit vectoriel

a) Définitions

Soit E un espace euclidien de dimension n, **orienté** (cf. Chap. 1, § **VIII-1**).

Rappel : soient $f \in \mathcal{L}(E)$, $(u_1, \ldots, u_n)$ un système de n vecteurs de E et $\mathcal{B}$ une base de E ; on a

$$\det_{\mathcal{B}}\big(f(u_1), \ldots f(u_n)\big) = \det f \times \det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots u_n).$$

De même, si $\mathcal{B}'$ est une autre base de E, P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, on a

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots u_n) = \det P \times \det_{\mathcal{B}'}(u_1, \ldots u_n).$$

(Ces relations proviennent des égalités matricielles correspondantes, elles-mêmes découlant de la définition du produit de deux matrices et des relations “habituelles” $Y = AX$ et $X = PX' \ldots$)

Théorème et définition : soit $\mathcal{S} = (u_1, \ldots, u_n)$ un système de n vecteurs de E. Le déterminant de $\mathcal{S}$ dans une base orthonormale directe de E ne dépend pas du choix de ladite base orthonormale directe. Sa valeur est appelée *le produit mixte* de $u_1, \ldots, u_n$, noté $[u_1, \ldots, u_n]$.

Théorème et définition : soient $u_1, \ldots, u_{n-1}$ $n-1$ vecteurs de E (ici $n \geq 3$). Il existe un unique vecteur v de E tel que : $\forall w \in E \quad (v|w) = [u_1, \ldots, u_{n-1}, w]$.
v est appelé *le produit vectoriel de* $u_1, \ldots, u_{n-1}$, noté $u_1 \wedge \ldots \wedge u_{n-1}$.

b) Propriétés du produit vectoriel dans E, euclidien orienté de dimension 3

$\vec{u} \wedge \vec{v}$ est défini par : $\forall \vec{w} \in E \quad [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v} \mid \vec{w})$.
L’application $(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} \wedge \vec{v}$ de $E \times E$ dans E est bilinéaire et antisymétrique ($\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$).
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de E sont colinéaires si et seulement si $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
Quels que soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| . \|\vec{v}\|$.
Si la famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est orthonormale, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est l’unique vecteur $\vec{w}$ tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit une base orthonormale directe.
Si $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est orthonormale, alors $\vec{k} = \pm\vec{i} \wedge \vec{j}$.
Si $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est orthonormale directe, alors $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$ et $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$.

Expression analytique : soit $\mathcal{B} = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est une base orthonormale directe de E et $\vec{u}$, $\vec{u}'$ deux vecteurs, de coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z') dans $\mathcal{B}$. Alors

$$\vec{u} \wedge \vec{u}' = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} .\vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} .\vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} .\vec{k}.$$

4) Isométries vectorielles d’un plan euclidien orienté

a) Le groupe $O_2(\mathbb{R})$

Théorème : le groupe $SO_2(\mathbb{R})$ des matrices des rotations de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est l’ensemble des

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \ \theta \in \mathbb{R}.$$

$(SO_2(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe commutatif. Plus précisément,

$$\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2 \quad R_\theta \times R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'} = R_{\theta'} \times R_\theta.$$

NB : il en résulte que $P^{-1} R_\theta P = R_\theta$ pour toute matrice P de $SO_2(\mathbb{R})$, autrement dit l’isométrie r_θ de $\mathbb{R}^2$ ayant pour matrice R_θ dans une base orthonormale directe a pour matrice R_θ dans toute base orthonormale directe. r_θ est appelée *la rotation d’angle* θ dans $\mathbb{R}^2$ (bien sûr, l’angle d’une rotation est défini **modulo** $\boldsymbol{2\pi}$).

Théorème : le groupe $O_2(\mathbb{R})$ est constitué des matrices de rotation et des matrices de réflexion $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ (symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathrm{Vect}\left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\right)$).

b) Isométries vectorielles d'un plan euclidien orienté

Soient P un plan euclidien orienté et $r \in SO(P)$ une rotation de P.
Il existe θ réel tel que la matrice de r dans toute base orthonormale directe soit $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
r est appelée *la rotation d'angle* θ (**modulo** $\boldsymbol{2\pi}$).

Les isométries de P sont les rotations et les réflexions.

Soient r_θ et $r_{\theta'}$ les rotations d'angles respectifs θ et θ' ; r_θ et $r_{\theta'}$ commutent et leur composée est la rotation d'angle $\theta + \theta'$.

Écriture complexe d'une rotation : si $\mathcal{B} = \left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ est une base orthonormale directe de P et si $\vec{u} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$ est le vecteur d'affixe $z = x + iy$, alors $r_\theta(\vec{u})$ est le vecteur d'affixe $e^{i\theta}.z$.

c) Angles orientés et aires en dimension 2

Soient P un plan euclidien orienté et $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs **unitaires** de P.
On définit **modulo** $\boldsymbol{2\pi}$ *l'angle orienté* $\theta = (\vec{u}, \vec{v})$ par

$$\cos\theta = \vec{u} \cdot \vec{v} \quad \text{et} \quad \sin\theta = [\vec{u}, \vec{v}]$$

(c'est l'angle de l'unique rotation qui transforme $\vec{u}$ en $\vec{v}$).

Rappel : l'angle **non orienté** entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est $\arccos(\vec{u} \cdot \vec{v})$ (élément de $[0, \pi]$).

Propriété : l'aire **algébrique** d'un parallélogramme $ABDC$ est le produit mixte $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]$.

L'aire **algébrique** du triangle ABC est $\dfrac{1}{2}\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]$.

Le signe indique l'orientation ; pour les aires géométriques, prendre les valeurs absolues !

5) Isométries vectorielles en dimension 3

Dans tout ce paragraphe E désigne un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.

a) Réduction d'une isométrie en base orthonormale

Lemme : soit $f \in O(E)$; f admet 1 ou -1 pour valeur propre et l'orthogonal de tout sous-espace propre de f est stable par f.

On classifie alors les isométries vectorielles de E selon la dimension de l'espace des vecteurs invariants $F = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$.

- *Cas* $\dim F = 3$: alors $f = \mathrm{Id}_E$ (rotation triviale !).
- *Cas* $\dim F = 2$: alors f induit une isométrie de la droite $D = F^\perp$, qui est nécessairement $-\mathrm{Id}_D$ (sinon $f = \mathrm{Id}_E$). f est donc la réflexion de plan F ; sa matrice dans une base orthonormale adaptée à la décomposition $E = F \oplus F^\perp$ est $\operatorname{diag}(1, 1, -1)$. En particulier $\det f = -1$, c'est une isométrie indirecte.
- *Cas* $\dim F = 1$: alors f induit une isométrie du plan $P = F^\perp$, qui n'admet que le vecteur nul comme vecteur invariant ; c'est donc une rotation de P (différente de l'identité) et f est alors une rotation de E (cf. déterminant par blocs). Plus précisément, dans une base orthonormale adaptée à la décomposition $E = P \oplus F$, f admet une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R} \backslash 2\pi\mathbb{Z}$.
  On dit que f est *une rotation d'axe* F.
- *Cas* $\dim F = 0$: alors f admet -1 comme valeur propre ; soit $G = E_{-1}(f)$; f induit une isométrie de $G^\perp$ qui n'admet aucune valeur propre : $G^\perp$ est donc de dimension 0 ou 2 ;
  - ∗ soit $G^\perp = \{0\}$: alors $f = -\mathrm{Id}_E$!
  - ∗ soit $G^\perp$ est un plan P et f induit une rotation de P différente de l'identité ; dans une base orthonormale adaptée à la décomposition $E = P \oplus G$, f admet une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; on a alors $f = r \circ s = s \circ r$ où r est une rotation d'axe G et s la réflexion de plan $P = G^\perp$.

b) Axe et angle d'une rotation

Étant donné un vecteur non nul de E, on appelle *axe orienté par* $\vec{a}$ la droite $\mathrm{Vect}\,(\vec{a})$ **orientée** par le choix de $(\vec{a})$ comme base directe. Compte tenu de l'orientation de E, le choix de $\vec{a}$ pour orienter la droite qu'il engendre *induit* une orientation du plan P normal à $\vec{a}$: une base $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ de P est directe si et seulement si la base $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{a}\right)$ de E est directe.

Soit alors r une rotation de E, distincte de Id_E. L'ensemble de ses vecteurs invariants est une droite, que l'on oriente par un de ses vecteurs directeurs $\vec{a}$. Il en résulte une orientation du plan normal à $\vec{a}$, qui permet de définir modulo 2π l'angle θ de la rotation de ce plan induite par r.

On dit alors que r est *la rotation d'axe orienté par* $\vec{a}$ *et d'angle* θ (modulo 2π).

Si l'on choisit $\vec{a}$ **unitaire** et $\vec{i}$, $\vec{j}$ tels que $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{a}\right)$ soit une base orthonormale directe de E, alors la matrice de r **dans cette base** est $R=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Attention ! r est aussi la rotation d'axe orienté par $-\vec{a}$ et d'angle $-\theta$... En effet, $\left(\vec{i},-\vec{j},-\vec{a}\right)$ est une base orthonormale directe adaptée à cette orientation et

$$\begin{cases} r\left(\vec{i}\right) & =\cos\theta.\vec{i}+\sin\left(-\theta\right).\left(-\vec{j}\right)\\ r\left(-\vec{j}\right) & =-\sin\left(-\theta\right).\vec{i}+\cos\theta.\left(-\vec{j}\right)\\ r\left(-\vec{a}\right) & =-\vec{a}\end{cases}$$

NB : un système de valeurs propres de R dans $\mathbb{C}$ est $\left(e^{i\theta},e^{-i\theta},1\right)$, donc R est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\theta\in\pi\mathbb{Z}$, soit si et seulement si $R=I_3$ ou $R=\mathrm{diag}\,(-1,-1,1)$, r étant alors la symétrie orthogonale par rapport à son axe, appelée aussi *demi-tour d'axe* $\mathrm{Vect}\,(\vec{a})$ (rotation d'angle π, pour laquelle l'orientation de l'axe n'a pas d'importance...).

Pour écrire la matrice dans une base donnée d'une rotation donnée

Étant données une base $\mathcal{B}$ de E (par exemple la base canonique de $\mathbb{R}^3$) et la rotation r d'axe orienté par le vecteur unitaire $\vec{a}$, d'angle θ, pour obtenir la matrice de r dans $\mathcal{B}$, il suffit de choisir un vecteur unitaire $\vec{i}$ orthogonal à $\vec{a}$, de poser $\vec{j}=\vec{a}\wedge\vec{i}$ de sorte que $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{a}\right)$ soit une base orthonormale directe de E, alors on connaît la matrice R de r dans cette base (cf. ci-dessus) et l'on en déduit la matrice de r dans la base $\mathcal{B}$, qui est PRP^{-1}, où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{a}\right)$. Si $\mathcal{B}$ est orthonormale, on a $P\in O_3\left(\mathbb{R}\right)$ et donc $P^{-1}={}^tP$!

Pour reconnaître une matrice de rotation et déterminer son axe et son angle

On voit immédiatement si une matrice R de $\mathcal{M}_3\left(\mathbb{R}\right)$ est orthogonale, puisque cela équivaut au fait que la famille (C_1,C_2,C_3) de ses vecteurs colonnes est ortho**normale**. Dans ce cas, R est une matrice de rotation si et seulement si $C_1\wedge C_2=+C_3$; sachant que $C_1\wedge C_2=\pm C_3$, on peut se contenter de comparer les signes d'une des coordonnées (non nulle !) de ces deux vecteurs (il n'est pas nécessaire de calculer $\det R$...).

S'il s'avère que $R\in SO_3\left(\mathbb{R}\right)$, son axe est l'ensemble des vecteurs invariants, fourni si besoin par la résolution du système $(R-I)\,X=0$ (c'est nécessairement une droite, donc il suffit de trouver un vecteur invariant non nul...).

Une fois l'axe déterminé, on choisit un vecteur non nul $\vec{a}$ pour l'orienter, reste à trouver l'angle θ.

Pour cela, on détermine $\cos\theta$ grâce à la relation $\mathrm{Tr}\,(R)=1+2\cos\theta$ et l'on détermine le signe de $\sin\theta$ grâce à la propriété suivante (ce qui permet de connaître θ modulo 2π).

Propriété : si r est la rotation d'axe orienté par $\vec{a}$ et d'angle θ, alors pour tout vecteur $\vec{u}$ non colinéaire à $\vec{a}$, $\sin\theta$ est du signe du produit mixte $\left[\vec{u},r\left(\vec{u}\right),\vec{a}\right]$.

Exemples :

- Écrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la rotation d'axe orienté par $(1,1,-1)$ d'angle $\pi/3$.
- Caractériser géométriquement l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice R dans la base canonique, où

$$R=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}8 & 1 & -4\\ -4 & 4 & -7\\ 1 & 8 & 4\end{pmatrix}$$

c) Angles et volumes en dimension 3

La notion d'angle orienté dans l'espace n'a pas de sens (à moins de se situer dans un plan orienté, par le choix d'une orientation de sa normale...).

On en reste donc, pour deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, à l'angle non orienté $\alpha = \arccos \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| . \|\vec{v}\|} \in [0, \pi]$.

L'angle (toujours non orienté) des deux droites $\mathrm{Vect}\,(\vec{u})$ et $\mathrm{Vect}\,(\vec{v})$ est $\arccos \dfrac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| . \|\vec{v}\|} \in [0, \pi/2]$.

L'angle de deux plans est par définition l'angle de leurs normales (deux plans sont perpendiculaires si et seulement si leurs normales sont orthogonales...).

Le volume du parallélépipède construit sur trois arêtes $[A, B]$, $[A, C]$, $[A, D]$ est $\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]\right|$.

Le volume du tétraèdre $ABCD$ est $\dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]\right|$.

V - Réduction des endomorphismes symétriques et des matrices symétriques réelles

E désigne toujours un espace euclidien.

1) Théorème spectral (*fondamental* !)

Soit f un endomorphisme symétrique de E ; E est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de f ; autrement dit, f est diagonalisable dans une base orthonormale, ou encore il existe une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de f.

Corollaire : soit A une matrice symétrique réelle; A est diagonalisable avec une matrice de passage orthogonale : $\exists P \in O_n(\mathbb{R}) \quad P^{-1}AP$ diagonale (avec $P^{-1} = {}^tP$!).

Lemme 1 : si A matrice symétrique réelle, le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{R}$.

Dém. Le polynôme caractéristique χ_A de A, considérée comme matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, est scindé sur $\mathbb{C}$ (théorème de d'Alembert-Gauss !) ; soient donc $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et $Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé :

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{et} \quad AZ = \lambda.Z \ ;$$

j'ai alors, en transposant et en conjuguant, comme A est symétrique réelle,

$${}^t\overline{Z}.A = \overline{\lambda}.{}^t\overline{Z} \quad \text{d'où} \quad {}^t\overline{Z}.A.Z = \overline{\lambda}.{}^t\overline{Z}.Z \quad \text{c'est-à-dire} \quad \lambda.{}^t\overline{Z}.Z = \overline{\lambda}.{}^t\overline{Z}.Z$$

or

$${}^t\overline{Z}.Z = \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 > 0 \quad \text{donc} \quad \lambda = \overline{\lambda} \ ;$$

par conséquent, χ_A est à coefficients réels et toutes ses racines en tant que polynôme de $\mathbb{C}[X]$ sont réelles : χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$.

NB : de même, les valeurs propres d'une matrice antisymétrique réelle sont imaginaires pures.

Lemme 2 : si $f \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique et F un sous-espace de E stable par f, $F^\perp$ est stable par f.

Dém. Supposons F stable par f ; soit alors $u \in F^\perp$:

$$\forall v \in F \quad (f(u)\,|v) = (u|f(v)) = 0$$

puisque $u \in F^\perp$ et $f(v) \in F$; donc $f(u) \in F^\perp$, ceci pour tout u de $F^\perp$: $F^\perp$ est stable par f.

Dém. du théorème : par récurrence forte sur $n = \dim E$; soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$ l'assertion : “pour tout endomorphisme symétrique f de tout espace vectoriel euclidien de dimension n, il existe une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de f”.

- $\mathcal{P}_1$ est triviale ;
- hypothèse de récurrence : soit $n \geq 2$ tel que $\mathcal{P}_k$ soit vraie pour tout $k < n$;

- Soient alors E un espace vectoriel euclidien de dimension n et f un endomorphisme symétrique de E, A la matrice de f dans une base orthonormale de E. D'après le lemme 1, A admet au moins une valeur propre réelle λ, soit donc $F = E_\lambda(f)$ le sous-espace propre associé ; F est stable par f et donc $G = F^\perp$ est également stable par f d'après le lemme 2. Soit g l'endomorphisme de G induit par f ; muni du produit scalaire induit par celui de E, G est un espace vectoriel euclidien de dimension $p < n$ et g est un endomorphisme symétrique de G :
$$\forall (u,v) \in G^2 \quad (g(u)|v)_G = (f(u)|v)_E = (u|f(v))_E = (u|g(v))_G$$
donc l'hypothèse de récurrence me fournit une base orthonormale de G formée de vecteurs propres de g, qui sont aussi des vecteurs propres de f ! Il suffit alors de la compléter par une base orthonormale de F (également formée de vecteurs propres de f !) pour conclure.

Attention ! Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (pour $n \geq 2$!), il existe des matrices symétriques non diagonalisables… Voir par exemple $\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$.

2) Endomorphismes et matrices symétriques positifs

(compléments hors programme mais très classiques…)

Définition : un endomorphisme symétrique f de E est dit *positif* (resp. *défini positif*) si la forme bilinéaire symétrique associée $B : (u,v) \mapsto (u|f(v))$ l'est, c'est-à-dire si et seulement si
$$\forall u \in E \quad B(u,u) = (u|f(u)) \geq 0 \quad (\textit{resp. } \forall u \in E \setminus \{0\} \quad B(u,u) = (u|f(u)) > 0).$$

NB : les endomorphismes symétriques définis positifs sont associés aux produits scalaires sur E. Ce sont les endomorphismes symétriques positifs et bijectifs.

Caractérisation : un endomorphisme symétrique f de E est positif (*resp.* défini positif) si et seulement si ses valeurs propres sont dans $\mathbb{R}^+$ (*resp.* $\mathbb{R}^{+*}$).

<u>*Dém.*</u> Soit f un endomorphisme symétrique de E ; le théorème spectral me fournit une base orthonormale de vecteurs propres de E et le système $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ des valeurs propres associées :
$$\forall k \in \mathbb{N}_n \quad f(e_k) = \lambda_k . e_k .$$
Pour tout vecteur $u = \sum_{k=1}^{n} x_k . e_k$ de E, j'ai
$$B(u,u) = (u|f(u)) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k . x_k^2 .$$
Il en résulte immédiatement que, si tous les λ_k sont dans $\mathbb{R}^+$ (*resp.* $\mathbb{R}^{+*}$), alors f est positif (*resp.* défini positif).
Pour la réciproque, il suffit de remarquer que : $\forall k \in \mathbb{N}_n \quad \lambda_k = (e_k|f(e_k))$.

Définition : une matrice symétrique réelle A est dite *positive* (resp. *définie positive*) si l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé $\operatorname{Can} A$ l'est, c'est-à-dire si et seulement si
$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad {}^tXAX \geq 0 \quad (\textit{resp. } \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \quad {}^tXAX > 0).$$

Caractérisation : une matrice symétrique réelle est positive (*resp.* définie positive) si et seulement si ses valeurs propres sont dans $\mathbb{R}^+$ (*resp.* $\mathbb{R}^{+*}$).

<u>*Exemple important*</u> : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice $B = {}^tAA$ est symétrique positive ; de plus $\operatorname{Can} B$ a même noyau que $\operatorname{Can} A$ et
$$\operatorname{rg}\left({}^tAA\right) = \operatorname{rg} A.$$

<u>*Dém.*</u> Il est clair que B est symétrique et que : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad {}^tXBX = \|AX\|^2 \geq 0$.
Pour le second point, la relation ci-dessus montre que : $BX = 0 \Rightarrow AX = 0$. Or la réciproque est banale et il en résulte $\operatorname{Ker} \operatorname{Can} B = \operatorname{Ker} \operatorname{Can} A$; l'égalité des rangs résulte alors du théorème du rang ! Le lecteur attentif aura reconnu en ${}^tAA$ la matrice de Gram des vecteurs colonnes de A.