7. Intégration sur un intervalle quelconque

Les fonctions considérées sont à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
I est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$.

I - Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux

1) Fonctions en escalier, fonctions continues par morceaux

a) Définitions

On appelle *subdivision* d'un segment $[a,b]$ $(a<b)$ de $\mathbb{R}$ toute famille $\sigma = (a_0,\ldots,a_n)$ de réels tels que

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b.$$

Une fonction φ est dite *en escalier sur* $[a,b]$ si et seulement s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0,\ldots,a_n)$ de $[a,b]$ telle que la restriction de φ à l'intervalle ouvert $]a_{k-1},a_k[$ soit constante, pour tout k de $\mathbb{N}_n$. La subdivision σ est alors dite *adaptée* à φ.

Une fonction f est dite *continue par morceaux sur* $[a,b]$ si et seulement s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0,\ldots,a_n)$ de $[a,b]$ telle que la restriction de f à l'intervalle ouvert $]a_{k-1},a_k[$ soit prolongeable par continuité à $[a_{k-1},a_k]$, pour tout k de $\mathbb{N}_n$. La subdivision σ est alors dite *adaptée* à f.

f est dite *continue par morceaux sur l'intervalle* I si et seulement si elle l'est sur tout segment de I.

Propriété : une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée sur ce segment (mais elle n'atteint pas toujours ses bornes...).

Exemple : la fonction *partie entière* $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$; elle n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$, elle est en escalier sur tout segment de $\mathbb{R}$.

b) Structures

Les fonctions continue par morceaux sur $[a,b]$ (*resp.* sur I), à valeurs dans $\mathbb{K}$, forment une $\mathbb{K}$-algèbre, notée $\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$ (*resp.* $\mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$).
Les fonctions en escalier sur $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$, forment une sous-algèbre de $\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$.

2) Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux

a) Théorème et définition

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$ (où $a<b$) ; pour toute subdivision $\sigma = (a_0,\ldots,a_n)$ de $[a,b]$ adaptée à f, on note

$$S(f,\sigma) = \sum_{k=1}^{n} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f_k$$

(où, pour tout k, f_k est le prolongement par continuité de $f_{|]a_{k-1},a_k[}$ à $[a_{k-1},a_k]$).

$S(f,\sigma)$ ne dépend pas du choix de la subdivision σ adaptée à f ; cet élément de $\mathbb{K}$ est appelé *"intégrale de f. sur $[a,b]$"*, ou *"intégrale de a à b de f"*, noté

$$\int_{[a,b]} f\ ,\ \int_a^b f \text{ ou encore } \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

<u>Dém.</u> Remarquons tout d'abord que $S(f,\sigma)$ n'est pas modifié si j'ajoute un point à la subdivision σ, adaptée à f : supposons par exemple que $\sigma = (a_0,\ldots,a_n)$ et que σ' est constituée des mêmes points, plus un point α élément de $]a_{i-1},a_i[$; comme f_i est continue sur le segment $[a_{i-1},a_i] = [a_{i-1},\alpha] \cup [\alpha,a_i]$, je passe de $S(f,\sigma)$ à $S(f,\sigma')$ en remplaçant le terme $\displaystyle\int_{a_{i-1}}^{a_i} f_i$ par :

$$\int_{a_{i-1}}^{\alpha} f_i + \int_{\alpha}^{a_i} f_i \text{ , qui est encore égal à } \int_{a_{i-1}}^{a_i} f_i \text{ grâce à la relation de Chasles.}$$

En réitérant ce procédé, je montre par récurrence que $S(f,\sigma)$ n'est pas modifié si j'ajoute un nombre fini de points à la subdivision σ.
Soient alors σ_1 et σ_2 deux subdivisions adaptées à f et σ' la subdivision obtenue en “fusionnant” σ_1 et σ_2 (c'est-à-dire en rangeant par ordre croissant les points de la réunion des ensembles formés des points de σ_1 et σ_2 respectivement). σ' se déduit de σ_1 (ainsi que de σ_2) en ajoutant un nombre fini de points, donc, grâce au résultat précédent :

$$S\left(f,\sigma'\right)=S\left(f,\sigma_1\right) \quad \text{et} \quad S\left(f,\sigma'\right)=S\left(f,\sigma_2\right)\ , \quad \text{d'où} \quad S\left(f,\sigma_1\right)=S\left(f,\sigma_2\right)\ :\ \textbf{cqfd}.$$

Définition : si f est continue par morceaux sur un intervalle I et si c et d sont deux éléments de I tels que $d<c$, on pose $\displaystyle\int_c^d f=-\int_d^c f=-\int_{[d,c]} f$. Enfin on pose $\displaystyle\int_a^a f=0$.

b) Premières propriétés

Propriété : *relation de Chasles (additivité par rapport à l'intervalle)*
Si a,b,c sont trois points d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $f\in\mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$, alors

$$\int_a^c f=\int_a^b f+\int_b^c f\ .$$

Théorème : *linéarité par rapport à la fonction*
L'application : $\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})\to\mathbb{K},\ f\mapsto\displaystyle\int_a^b f$ est linéaire.

$$\forall (f,g)\in(\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K}))^2 \quad \forall\lambda\in\mathbb{K} \quad \int_a^b(\lambda.f+g)=\lambda\int_a^b f+\int_a^b g.$$

Théorème : *positivité, croissance pour les fonctions à valeurs réelles*
Soit $a\leq b$, et $(f,g)\in(\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R}))^2$.

1) *Positivité* : si $f\geq 0$ sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f\geq 0$.
2) *Croissance de l'intégrale* : si $f\leq g$ sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f\leq\int_a^b g$.
3) *Inégalité de la moyenne* : $\displaystyle\left|\int_a^b f\right|\leq\int_a^b|f|\leq(b-a)\sup_{[a,b]}|f|$.
4) Si f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, non nulle en un point où elle est continue, alors $\displaystyle\int_a^b f>0$.
5) Si f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, continue et d'intégrale nulle, alors f est nulle sur $[a,b]$.

Propriété : soit $f:[a,b]\to\mathbb{C}$. $f\in\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{C})\Leftrightarrow\big(\mathrm{Re}\,f\in\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})\quad\text{et}\quad\mathrm{Im}f\in\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})\big)$.
Si c'est le cas :

$$\int_a^b f=\int_a^b\mathrm{Re}\,f+\mathbf{i}.\int_a^b\mathrm{Im}f \quad \text{et} \quad \int_a^b\overline{f}=\overline{\int_a^b f}\ .$$

Définition : si $a\neq b$ et $f\in\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$, $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f$ est *la valeur moyenne de f sur $[a,b]$* (c'est la valeur de l'application **constante** ayant même intégrale que f sur $[a,b]$).

Propriété : *extensions de l'inégalité de la moyenne*
Si $f\in\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$, alors (attention au signe de $b-a$!) :

$$\left|\int_{[a,b]} f\right|\leq\int_{[a,b]}|f|\leq|b-a|\sup_{[a,b]}|f|\,.$$

Si $(f,g)\in\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})^2$, alors :

$$\left|\int_{[a,b]} f.g\right|\leq\sup_{[a,b]}|f|\,.\int_{[a,b]}|g|\ .$$

c) Généralisation

Théorème : soit $(f,g) \in (\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R}))^2$.

Si f et g coïncident sauf en un nombre fini de points de $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b g$.

En effet, $f-g$ est nulle sauf en un nombre fini de points a_i, donc d'intégrale nulle.

Définition : soit $f : [a,b] \to F$ une fonction définie sur $[a,b]$ privé des points d'une subdivision $\sigma = (a_i)_{0\leq i\leq n}$ de $[a,b]$.

Si la restriction de f à chacun des intervalles ouverts $]a_{i-1},a_i[$ $(1 \leq i \leq n)$ est prolongeable en une fonction continue sur chaque $[a_{i-1},a_i]$, on prolonge de façon quelconque f sur $[a,b]$. On obtient une fonction $\widetilde{f}$ continue par morceaux sur $[a,b]$. On pose :

$$\int_a^b f = \int_a^b \widetilde{f}.$$

Cette définition ne dépend pas du prolongement $\widetilde{f}$ choisi.

II - Convergence, convergence absolue des intégrales généralisées

1) Définitions – Notion de convergence

Soit $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ tel que $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

- Si $f \in \mathcal{CM}([a,b[,\mathbb{K})$, on dit que *l'intégrale (généralisée*, ou *impropre)* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, ou $\displaystyle\int_{[a,b[} f(t)\,\mathrm{d}t$, est *convergente* si et seulement si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie à gauche en b.
  Si c'est le cas, on note
  $$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{[a,b[} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \overset{<}{\to} b} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$
  Sinon l'intégrale est dite *divergente.*

- Si $f \in \mathcal{CM}(]a,b],\mathbb{K})$, on dit que *l'intégrale (généralisée*, ou *impropre)* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, ou $\displaystyle\int_{]a,b]} f(t)\,\mathrm{d}t$, est *convergente* si et seulement si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie à droite en a.
  Si c'est le cas, on note
  $$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{]a,b]} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \overset{>}{\to} a} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$
  Sinon l'intégrale est dite *divergente.*

- Si $f \in \mathcal{CM}(]a,b[,\mathbb{K})$, on dit que *l'intégrale (généralisée*, ou *impropre)* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, ou $\displaystyle\int_{]a,b[} f(t)\,\mathrm{d}t$, est *convergente* si et seulement si, α ayant été fixé dans $]a,b[$, **les deux** intégrales impropres $\displaystyle\int_a^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes (ce qui ne dépend pas du choix de α). Si c'est le cas, on note
  $$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{]a,b[} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t + \int_\alpha^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$
  Sinon l'intégrale est dite *divergente.*

Attention ! Dans ce dernier cas, il est indispensable de traiter **séparément** les deux limites (cf. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^x t\mathrm{d}t = 0$ alors que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{d}t$ est divergente).

NB : lorsque f est (ou peut se prolonger en, cf. le § **I-2-c** *in fine*) une fonction continue par morceaux **sur le segment** $[a,b]$, les trois intégrales sur $]a,b]$, $[a,b[$ et $]a,b[$ convergent et valent l'intégrale "ordinaire" de f sur $[a,b]$.

Calcul à l'aide d'une primitive – crochet généralisé

Si f est continue sur $]a,b[$ et admet pour primitive F sur $]a,b[$, alors $\displaystyle\int_a^b f$ converge si et seulement si F admet des limites finies en a et en b. Si c'est le cas, on note $[F]_a^b$ ou $[F(t)]_a^b$ la différence $\lim\limits_b F - \lim\limits_a F$ et l'on a encore $\displaystyle\int_a^b f = [F]_a^b$ (idem sur $[a,b[$ ou sur $]a,b]$).

Exemples :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 2 \ ; \ \int_0^1 \ln t \mathrm{d}t = -1 \ ; \ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \pi \ ; \text{ pour } \alpha \in \mathbb{C}, \text{ tel que } \operatorname{Re}\alpha > 0, \ \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}.$$

Intégrales de Riemann : soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et a, b réels tels que $a < b$.

1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$;

2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$;

$\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\alpha}$ est convergente ssi $\alpha < 1$; $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(b-t)^\alpha}$ est convergente ssi $\alpha < 1$.

Attention ! $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ n'est **jamais** convergente !

Attention ! Pour que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, il n'est **ni nécessaire ni suffisant** que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

- $*$ <u>condition non suffisante</u> : $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ a pour limite 0 en $+\infty$ mais $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ est divergente ;
- $*$ <u>condition non nécessaire</u> : soit f continue et affine par morceaux sur $[1,+\infty[$, nulle en dehors des segments de la forme $\left[n, n+\dfrac{1}{n^3}\right]$, affine sur $\left[n, n+\dfrac{1}{2n^3}\right]$ et sur $\left[n+\dfrac{1}{2n^3}, n+\dfrac{1}{n^3}\right]$ et telle que $f\left(n+\dfrac{1}{2n^3}\right) = n$, cela pour tout n de $\mathbb{N}^*$;

  $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, mais f n'a pas de limite en $+\infty$ (elle n'est pas bornée !).

Toutefois, si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente **et si** f **admet une limite** en $+\infty$, cette limite est nécessairement nulle.

2) Premières propriétés

1) *<u>Linéarité</u>* :

$*$ si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent, alors $\displaystyle\int_a^b (f+g)(t)\,\mathrm{d}t$ aussi et

$$\int_a^b (f+g)(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \ ;$$

Attention ! $\displaystyle\int_a^b (f+g)(t)\,\mathrm{d}t$ peut converger tandis que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ divergent.

$*$ si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\displaystyle\int_a^b (\lambda.f)(t)\,\mathrm{d}t$ aussi et

$$\int_a^b (\lambda.f)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda.\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

2) *Positivité, croissance pour les fonctions à valeurs réelles* :soit $(f,g) \in (\mathcal{CM}(I,\mathbb{R}))^2$

* *positivité* : si $f \geq 0$ et si $\displaystyle\int_I f$ converge, alors $\displaystyle\int_I f \geq 0$;
* *croissance de l'intégrale* : si $f \leq g$ sur I et si $\displaystyle\int_I f$ et $\displaystyle\int_I g$ convergent, $\displaystyle\int_I f \leq \int_I g$;
* si f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, continue et d'intégrale nulle sur I, alors f est nulle sur I.

3) *Relation de Chasles* : si $-\infty \leq a < b < c \leq +\infty$ et f continue par morceaux sur $]a,c[$, $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent, auquel cas

$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t.$$

3) Convergence absolue – Fonctions intégrables

Définition : on dit que f, continue par morceaux sur I, est *intégrable sur* I, ou encore que $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ est *absolument convergente* si et seulement si $\displaystyle\int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente.

NB : l'étude de la convergence de l'intégrale d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ est simplifiée par l'existence de limites pour les fonctions monotones.

Caractérisation : f, continue par morceaux sur I, est intégrable sur I si et seulement s'il existe $M > 0$ tel que, pour tout segment J inclus dans I :

$$\int_J |f(t)|\,\mathrm{d}t \leq M.$$

En effet, lorsque $a < b$ nous avons les équivalences suivantes :

- f est intégrable sur $[a,b[$ si et seult si la fonction croissante $x \mapsto \displaystyle\int_a^x |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est bornée sur $[a,b[$.
- f est intégrable sur $]a,b]$ si et seult si la fonction décroissante $x \mapsto \displaystyle\int_x^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est bornée sur $]a,b]$.

Théorème : si $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, alors elle est convergente et l'on a

$$\left|\int_I f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Dém. Soit $f \in \mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$ telle que $\displaystyle\int_I |f|$ converge.

- Je traite d'abord le cas où f est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et je pose (classiquement) $f^+ = \max(f,0)$ et $f^- = \max(-f,0)$: f^+, f^- sont à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, $|f| = f^+ + f^-$ et $f = f^+ - f^-$; d'après la caractérisation précédente, je dispose de $M > 0$ tel que, pour tout segment J inclus dans I, $\displaystyle\int_J |f| \leq M$; or $0 \leq f^+ \leq |f|$ et $0 \leq f^- \leq |f|$, il en résulte que $\displaystyle\int_I f^+$ et $\displaystyle\int_I f^-$ convergent (toujours d'après la même caractérisation !). Finalement, par linéarité, $\displaystyle\int_I f$ converge.
- Pour le cas où f est à valeurs dans $\mathbb{C}$, j'écris $f = \operatorname{Re} f + i.\operatorname{Im} f$ et j'ai $|\operatorname{Re} f| \leq |f|$, $|\operatorname{Im} f| \leq |f|$. J'en déduis, comme ci-dessus, que $\displaystyle\int_I \operatorname{Re} f$ et $\displaystyle\int_I \operatorname{Im} f$ sont absolument convergentes, donc convergentes d'après le cas réel précédent. D'où, par linéarité, la convergence de $\displaystyle\int_I f$.
- Pour l'inégalité de la moyenne, partir du cas connu d'un segment $[a,x]$, $[x,b]$ ou $[x,y]$ et passer à la limite...

4) Intégrales semi-convergentes

Attention ! La réciproque du théorème précédent est fausse...

Définition : si $\displaystyle\int_I f$ converge, tandis que $\displaystyle\int_I |f|$ diverge, $\displaystyle\int_I f$ est dite *semi-convergente* (elle converge tout de même !).

Exemple : intégrale de Dirichlet $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$

$f : t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$ (on la prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$).
f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$, en effet :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{n\pi + u}\mathrm{d}u \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_0^{\pi} \sin u \mathrm{d}u = \frac{2}{(n+1)\pi}\ .$$

D'où :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \int_0^{p\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t \geq \sum_{n=0}^{p-1} \frac{2}{(n+1)\pi} \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} +\infty\ .$$

Par ailleurs j'intègre par parties (cf. le § **III-5)**, le lecteur vérifiera qu'il n'y a pas de cercle vicieux) : les fonctions $u : t \mapsto 1 - \cos t$ et $v : t \mapsto 1/t$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et le produit uv admet des limites finies (nulles) en 0 et en $+\infty$, donc les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} u'v$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} uv'$ sont de même nature.
Or $uv' : t \mapsto \dfrac{\cos t - 1}{t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ (car se prolonge par continuité en 0 et est un $O\left(1/t^2\right)$ au voisinage de $+\infty$).
Donc l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} u'v = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ converge également ; on peut montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \quad \textit{(intégrale de Dirichlet).}$$

III - Étude pratique de la nature d'une intégrale impropre

1) Utilisation des critères de comparaison pour l'*intégrabilité* d'une fonction

Ce paragraphe servira notamment à l'étude de la **convergence absolue** d'une intégrale.

I est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

1) Soient f, g continues par morceaux sur I, telles que $|f| \leq |g|$:
- $*$ si g est intégrable sur I, alors f est intégrable sur I ;
- $*$ si f n'est pas intégrable sur I, alors g n'est pas intégrable sur I.

2) Soient f, g continues par morceaux sur $[a, b[$, telles que $f(t) \underset{t\to b^-}{=} O(g(t))$:
- $*$ si g est intégrable sur $[a, b[$, alors f est intégrable sur $[a, b[$;
- $*$ si f n'est pas intégrable sur $[a, b[$, alors g n'est pas intégrable sur $[a, b[$.

De même sur $]a, b]$, lorsque $f(t) \underset{t\to a^+}{=} O(g(t))$.

3) Soient f, g continues par morceaux sur $[a, b[$, telles que $f(t) \underset{t\to b^-}{\sim} g(t)$;
f est intégrable sur $[a, b[$ si et seulement si g est intégrable sur $[a, b[$.
De même sur $]a, b]$, lorsque $f(t) \underset{t\to a^+}{\sim} g(t)$.

Attention ! Pour des fonctions de signe quelconque telles que $f(t) \sim g(t)$, les intégrales peuvent ne pas être de même nature, mais cela uniquement si l'une des deux est semi-convergente et l'autre divergente (il ne s'agit plus d'**intégrabilité**) ; en effet $|f(t)| \sim |g(t)|$, donc si l'une des intégrales est absolument convergente, l'autre aussi !

NB : par définition, $f(t) = O(g(t))$ équivaut à $|f(t)| = O(|g(t)|)$, d'où les conclusions du point **2)** ci-dessus, mais attention là encore aux intégrales semi-convergentes ! Par exemple, on a $\dfrac{|\sin x|}{x} \underset{x\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ et pourtant $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ converge, tandis que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x$ diverge...

2) Fonctions de référence

Les résultats précédents permettent notamment d'utiliser le "catalogue" officiel...

- *Intégrales de Riemann* : soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et a, b réels tels que $a < b$.
  - $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$;
  - $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ (*resp.* $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\alpha}$, $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(b-t)^\alpha}$) est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.
- $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ est convergente pour $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$; $\displaystyle\int_0^1 |\ln t|\,\mathrm{d}t$ est convergente.

3) Comparaison d'une série et d'une intégrale (cf. chap. 3 – § II – 4)

Soient $n_0 \in \mathbb{N}^*$ et f une application continue par morceaux sur $[n_0, +\infty[$, à valeurs réelles positives et décroissante.

La série de terme général $w_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)$ est convergente, à termes positifs ou nuls.

La série $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} f(n)$ converge si et seulement si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Application (hors programme mais classique !)

En cas de divergence, on a les infiniment grands équivalents $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{p} f(n) \underset{p\to\infty}{\sim} \int_{n_0}^{p} f(t)\,\mathrm{d}t$.

4) Changement de variable $\mathcal{C}^1$ bijectif

Soient $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ et $\varphi : J \mapsto I$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle J, bijective (*i.e.* strictement monotone). Soient c et d les extrémités de J ; $a = \lim\limits_{c} \varphi$ et $b = \lim\limits_{d} \varphi$ sont les extrémités de I (dans un ordre dépendant du sens de variation de φ). $f \circ \varphi$ est continue par morceaux sur J et

$\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_c^d f\big(\varphi(u)\big)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ converge, auquel cas :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^d f\big(\varphi(u)\big)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u \quad \text{(changement de variable } \mathcal{C}^1 \text{ bijectif } t = \varphi(u)\,).$$

5) Intégration par parties

Théorème : soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle d'extrémités a, b.

Si le produit uv admet des limites finies en a et b, alors les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^b u'v$ et $\displaystyle\int_a^b uv'$ sont de même nature et, en cas de convergence on a : $\displaystyle\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$.

NB : le théorème ci-dessus peut s'avérer commode dans des cas simples, mais sera parfois plus facile de rédiger une intégration par parties **sur un segment** suivie d'un passage à la limite (soigneusement justifié !)

NB : lorsque le produit fg admet une (ou deux) limites infinies, une intégration par parties **sur un segment** pourra donner une relation intéressante après étude d'une (ou deux) forme(s) indéterminée(s)...

6) Exemples *(hors programme, mais classiques)*

Pour comparer l'intégrale d'une fonction f à une intégrale de Riemann, penser à étudier la limite de $x^\alpha f(x)$ (ou de $(x-a)^\alpha f(x)$, ou encore de $(b-x)^\alpha f(x)$) pour α bien choisi.
Par exemple, $\sqrt{x}\cdot\ln^2 x \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} 0$, *a fortiori* $\ln^2 x \underset{x\to0^+}{=} O\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et $x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]0,1]$ (puisque $1/2<1$) ; donc $x\mapsto\ln^2 x$ est intégrable sur $]0,1]$.

Attention ! Pour les *calculs* d'intégrales, penser à utiliser une primitive, à effectuer un changement de variable ou une intégration par parties, sans oublier les justifications !

1) *Intégrale de Gauss* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\mathrm{d}x$

La fonction $x\mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs positives, paire ; or, par exemple,

$$x^2e^{-x^2}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0\quad\text{donc}\quad e^{-x^2}\underset{x\to+\infty}{=}O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Comme $2>1$, $x\mapsto\dfrac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et j'en déduis que f est intégrable sur $[1,+\infty[$.
Étant paire, elle est aussi intégrable sur $]-\infty,-1]$; étant continue sur $[-1,1]$, elle est finalement intégrable sur $\mathbb{R}$; ne pas chercher de méthode de calcul élémentaire… On peut montrer que :

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}.}$$

2) On peut établir comme ci-dessus que la fonction $x\mapsto xe^{-x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$; et, dans ce cas, on dispose d'une primitive :

$$\forall X\in\mathbb{R}^{+*}\quad\int_0^X xe^{-x^2}\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^X=\frac{1}{2}\left(1-e^{-X^2}\right)\underset{X\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{2}.$$

En conclusion, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} xe^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$.

3) <u>*Fonction Γ d'Euler*</u> : elle est définie par : $\displaystyle\forall x\in\mathbb{R}^{+*}\quad\Gamma(x)=\int_{\mathbb{R}^{+*}} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t.$

Fixons x strictement positif ; pour montrer que $\Gamma(x)$ est bien définie, je constate que la fonction $t\mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, à valeurs positives et que, d'une part,

$$t^{x-1}e^{-t}\underset{t\to0^+}{\sim}\frac{1}{t^{1-x}}\quad\text{avec } 1-x<1\ ;$$

ainsi $t\mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0,1]$; d'autre part,

$$t^2.t^{x-1}e^{-t}\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0\quad\text{donc}\quad t^{x-1}e^{-t}\underset{t\to+\infty}{=}O\left(\frac{1}{t^2}\right)\quad\text{avec } 2>1,$$

par conséquent $t\mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est également intégrable sur $[1,+\infty[$, donc finalement sur $\mathbb{R}^{+*}$.
À l'aide d'une intégration par parties, établissons la relation classique :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^{+*}\quad\Gamma(x+1)=x.\Gamma(x).}$$

Soit x dans $\mathbb{R}^{+*}$; les fonctions $u:t\mapsto t^x$ et $v:t\mapsto -e^{-t}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et le produit uv admet des limites finies (nulles !) en 0 et en $+\infty$; or $\displaystyle\int_0^{+\infty}u'v$ converge d'après ce qui précède, d'où la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty}uv'$ et la relation :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}t^xe^{-t}\mathrm{d}t&=\left[t^x.\left(-e^{-t}\right)\right]_{t\to0}^{t\to+\infty}-\int_0^{+\infty}\left(xt^{x-1}\right).\left(-e^{-t}\right)\mathrm{d}t\\&=x\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

C'est la relation annoncée.

Comme $\Gamma(1) = 1$, j'obtiens en particulier par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \mathrm{d}t = \Gamma(n+1) = n!$$

Calcul de $\Gamma(1/2)$: nous avons vu que $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$; or $x \mapsto x^2$ est une bijection $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$. Je peux donc effectuer le changement de variable $t = x^2$, qui me donne

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x} 2x \mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

où l'on a reconnu l'intégrale de Gauss !

4) Effectuons dans $\Gamma(n+1)$ le changement de variable $x = e^{-t}$: la fonction $\varphi : t \mapsto e^{-t}$ est $\mathcal{C}^1$ bijective (strictement décroissante) de $]0, +\infty[$ dans $]0, 1[$; $f : x \mapsto (-\ln x)^n$ est continue sur $]0, 1[$. Je viens de voir que $f \circ \varphi \cdot \varphi' : t \mapsto -t^n e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, j'en déduis que f est intégrable sur $]0, 1[$ et que

$$\int_1^0 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

d'où

$$\int_0^1 (-\ln x)^n\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \mathrm{d}t = n!$$

5) *Intégrales de Bertrand* : par une méthode similaire à celle utilisée pour les séries, on montre que

a) $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ est intégrable sur $[2, +\infty[$ si et seulement si $\begin{cases} \alpha > 1 & \text{ou} \\ \alpha = 1 & \text{et } \beta > 1 \end{cases}$;

b) $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha (-\ln t)^\beta}$ est intégrable sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right]$ si et seulement si $\begin{cases} \alpha < 1 & \text{ou} \\ \alpha = 1 & \text{et } \beta > 1 \end{cases}$.

IV - Espaces L^1 et L^2

1) Espace vectoriel normé $L^1_c(I, \mathbb{K})$

$N_1 : f \mapsto \displaystyle\int_I |f|$ est une norme sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $L^1_c(I, \mathbb{K})$ des applications de I dans $\mathbb{K}$, continues et intégrables sur I, dite *norme de la convergence en moyenne.*

2) Produit scalaire sur $L^2_c(I, \mathbb{R})$

Propriétés : 1) La somme de deux fonctions de carré intégrable est de carré intégrable.
2) Le produit de deux fonctions de carré intégrable est intégrable.

Dém. Utiliser les majorations classiques : $(f+g)^2 \leq 2\left(f^2 + g^2\right)$ et $|fg| \leq \dfrac{1}{2}\left(f^2 + g^2\right)$.

On note $L^2_c(I, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de I dans $\mathbb{R}$, continues et de carré intégrable sur I.

- L'application $(f, g) \mapsto (f|g) = \displaystyle\int_I f.g$ est un produit scalaire sur $L^2_c(I, \mathbb{R})$.
- La norme euclidienne associée $N_2 : f \mapsto \left(\displaystyle\int_I f^2\right)^{1/2}$ vérifie

$$\forall (f, g) \in L^2_c(I, \mathbb{R})^2 \quad |(f|g)| \leq N_1(fg) \leq N_2(f)\,N_2(g)\,.$$

N_2 est dite *norme de la convergence en moyenne quadratique.*

V - Intégration de suites et séries de fonctions

(Démonstrations hors programme.)

1) Théorème de convergence dominée

Soient (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$, continues par morceaux sur I, telle que :

- (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction φ indépendante de n, continue par morceaux et intégrable sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in I \quad |f_n(t)| \leq \varphi(t) \quad \textit{(hypothèse de domination).}$$

Alors les f_n et f sont intégrables sur I et la suite numérique $\left(\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, avec :

$$\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n \quad \text{c'est-à-dire} \quad \int_I \left(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\left(\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Exemples :

1) Intégrales de Wallis : $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t\mathrm{d}t \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (le TCD peut s'appliquer sur un segment !).

2) Intégrale de Gauss : soit, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \left(1 + \dfrac{x^2}{n}\right)^{-n}$.

Étudier $\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et en déduire la valeur de l'intégrale de Gauss : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

2) Intégration terme à terme d'une série de fonctions

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions de I dans $\mathbb{K}$, continues par morceaux sur I, telle que :

- $\sum u_n$ converge simplement sur I vers une fonction S continue par morceaux sur I ;
- les u_n sont intégrables sur I et la série numérique $\sum \displaystyle\int_I |u_n|$ converge.

Alors $S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ est intégrable sur I et la série numérique $\sum \left(\displaystyle\int_I u_n\right)$ converge, avec :

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_I u_n\right).$$

Exemples :

1) Établir : $\forall x > 1 \quad \Gamma(x)\zeta(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1}\mathrm{d}t$ (penser à écrire $\dfrac{1}{e^t-1} = \dfrac{e^{-t}}{1-e^{-t}} \ldots$).

2) Soit (c_n) une suite complexe telle que la série $\sum c_n$ soit absolument convergente.

On considère la fonction $f : t \mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \dfrac{t^n}{n!}$. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Montrer enfin que $t \mapsto e^{-t} f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} e^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$.

NB : on remarquera que la convergence uniforme n'intervient pas dans les deux énoncés précédents (contrairement au cas de l'intégration **sur un segment**). Toutefois, elle pourra être un moyen de justifier que la limite ou la fonction somme est continue (donc continue par morceaux !), notamment dans le cas où l'on n'aura pas d'expression explicite de la fonction somme d'une série de fonctions (cf. l'exemple **2** ci-dessus).

On remarquera aussi qu'appliquer le théorème d'intégration terme à terme à une série de fonctions **n'est pas** la même chose qu'appliquer le théorème de convergence dominée à la suite des sommes partielles. Cette dernière possibilité peut être envisagée, à condition de pouvoir dominer lesdites sommes partielles...

Voir par exemple $t \mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n$, à intégrer sur $[0,1[$.

VI - Intégrales dépendant d'un paramètre

Soient A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; on considère $f:\begin{array}{ccc} A\times I & \rightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \mapsto & f(x,t)\end{array}$ et on lui associe la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$.

1) Continuité sous le signe $\int$

Soit $f : A\times I \rightarrow \mathbb{K}$ telle que :

- pour tout t de I, $x\mapsto f(x,t)$ est continue sur A ;
- pour tout x de A, $t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction φ indépendante de x, continue par morceaux et intégrable sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, vérifiant :
$$\forall (x,t)\in A\times I \quad |f(x,t)|\leq \varphi(t) \quad \textit{(hypothèse de domination).}$$

Alors pour tout x de A, la fonction $t\mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I et $g : x\mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.

Exemple 1 : $g : x\mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-xt}\mathrm{d}t$.

Exemple 2 : $g : \theta\mapsto \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos\theta\cos t}$ est continue sur $[0,\pi[$.

2) Dérivation sous le signe $\int$ – Formule de Leibniz

Soit $f : A\times I \rightarrow \mathbb{K}$ telle que :

- pour tout t de I, $x\mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A ;
- pour tout x de A, la fonction $t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I ;
- pour tout x de A, $t\mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction ψ indépendante de x, continue par morceaux et intégrable sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$,vérifiant :
$$\forall (x,t)\in A\times I \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\leq \psi(t) \quad \textit{(hypothèse de domination).}$$

Alors $g : x\mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur A avec :
$$\forall x\in A \quad g'(x)=\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t \quad \textit{(formule de Leibniz).}$$

NB : penser à réitérer pour les dérivées successives de g.

Exemple 1 : $g : x\mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$; on en déduit la valeur de l'intégrale de Gauss.

Exemple 2 : calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}\mathrm{d}t$.

Exemple 3 : la fonction $\Gamma : x\mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

3) Extension au cas $\mathcal{C}^k$

Dans le cas où les dérivées successives ne se dominent pas facilement, on dispose du théorème suivant où il suffit de dominer la dernière dérivée.

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $f : A \times I \to \mathbb{K}$ telle que :

- pour tout t de I, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur A ;
- pour tout x de A et tout j de $[\![0, k-1]\!]$ la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I ;
- pour tout x de A, $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- il existe ψ_k, continue par morceaux et intégrable sur I, vérifiant :

$$\forall (x,t) \in A \times I \quad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \psi_k(t) \quad \textit{(hypothèse de domination).}$$

Alors $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et de classe $\mathcal{C}^k$ sur A avec :

$$\forall j \in [\![1, k]\!] \quad \forall x \in A \quad g^{(j)}(x) = \int_I \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\,\mathrm{d}t \quad \textit{(formule de Leibniz).}$$

4) Remarques complémentaires (et pratiques)

a) Utilisation de sous-intervalles de A

Si l'hypothèse de domination semble difficile à satisfaire lorsque x décrit A tout entier, penser à appliquer les théorèmes sur des sous-intervalles de A (par exemple sur tout segment inclus dans A) et conclure grâce au caractère **local** de la continuité et de la dérivabilité : si g est continue (*resp.* $\mathcal{C}^1$) sur tout segment de l'intervalle A, alors elle l'est sur A !

b) Cas où I est un segment

Penser à dominer par une fonction constante ! Si f est continue sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$, elle est bornée.

c) Limites de g aux bornes de A

Le programme de PSI ne comporte aucun théorème sur la limite éventuelle de $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ en une extrémité $a \in \overline{\mathbb{R}}$ de l'intervalle A, n'appartenant pas à A.

Pour ce genre d'étude, au moins trois idées :

- majorer "à la main" pour utiliser le théorème d'encadrement ;
- faire apparaître une composition de limites, du genre $F(x) = G\left(\dfrac{1}{x}\right)$ lorsque $x \to +\infty$;
- invoquer la caractérisation séquentielle de la limite : si, pour tout t fixé dans I, $f(x,t)$ tend vers une limite finie $\ell(t)$ lorsque x tend vers a, alors, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A, de limite a, tâcher d'appliquer le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $\big(t \mapsto f(x_n,t)\big)_{n\in\mathbb{N}}$; si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A de limite a, $\big(g(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $L = \displaystyle\int_I \ell(t)\,\mathrm{d}t$, alors $\lim\limits_a g = L$.

5) <u>Application</u> *(hors programme)* : théorème de division

Soient A un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0, $h : A \to \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$, et

$$g : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{h(x) - h(0)}{x} & \text{si } x \in A \setminus \{0\} \\ h'(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Alors g est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur A, avec : $\forall j \in \{1, \ldots, k-1\} \quad g^{(j)}(0) = \dfrac{1}{j+1} \cdot h^{(j+1)}(0)$.

En effet, on constate que : $\forall x \in A \quad g(x) = \displaystyle\int_0^1 h'(tx)\,\mathrm{d}t$ et l'on justifie la dérivation sous le signe $\int$.

Soit S un segment de A et $f : (x, t) \mapsto h'(xt)$.
Pour tout x de S, $t \mapsto f(xt)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0, 1]$ (car continue sur $[0, 1]$).
En outre pour tout t de $[0, 1]$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur S, avec :

$$\forall j \in \{1, \ldots, k-1\} \quad \forall (x, t) \in S \times [0, 1] \qquad \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t) = t^j h^{(j+1)}(tx).$$

Ainsi $t \mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0, 1]$, pour tout $j \in [\![1, k-1]\!]$; de plus, $h^{(j+1)}$ est continue donc bornée sur S et $\dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}$ est dominée par la fonction constante $\max\limits_S \left|h^{(j+1)}\right|$, qui est bien continue par morceaux et intégrable sur $[0, 1]$!!

Ainsi, g est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur S, pour tout segment S de A, donc sur A.
Et la formule de Leibniz (réitérée) donne :

$$\forall j \in \{1, \ldots, k-1\} \quad \forall x \in A \qquad g^{(j)}(x) = \int_0^1 t^j h^{(j+1)}(tx)\,\mathrm{d}t$$

d'où la valeur de $g^{(j)}(0)$.

6) Théorème de Fubini *(hors programme, mais classique)*

Soient a, b, c, d réels tels que $a < b$ et $c < d$.
Pour $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{K}$, continue sur le *pavé* $[a, b] \times [c, d]$, on a (*formule de Fubini*)

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

(on parle parfois d'*intégration sous le signe* $\int$).

NB : cette valeur commune correspond aussi à l'*intégrale double* de f sur $[a, b] \times [c, d]$, que l'on peut définir de bien d'autres manières dans diverses théories de l'intégration...