6. Séries entières

I - Séries entières d'une variable complexe

1) Généralités

On appelle *série entière* toute série de fonctions $\sum u_n$ pour laquelle il existe une suite (a_n) de nombres complexes telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad u_n(z) = a_n z^n .$$

Une telle série entière est notée abusivement $\sum a_n z^n$, appelée *série entière de la variable complexe* z ; les a_n sont *les coefficients* de la série entière.

NB : bien distinguer la série entière $\sum a_n z^n$ qui est une série de fonctions (z étant une "variable muette") et la série numérique $\sum a_n z^n$ pour z complexe fixé.

2) Rayon de convergence d'une série entière

Lemme d'Abel : soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$; si $\rho \in \mathbb{R}^{+*}$ est tel que la suite $(a_n \rho^n)$ soit bornée, alors pour tout complexe z tel que $|z| < \rho$, la série numérique $\sum a_n z^n$ converge absolument.

Dém. Supposons : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n \rho^n| \leq M$ et $|z| < \rho$; alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n z^n| = |a_n \rho^n| \cdot \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n \leq M \cdot \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n \quad \text{et} \quad \frac{|z|}{\rho} < 1$$

d'où le résultat (majoration par une série géométrique convergente).

Théorème et définition : soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$; il existe un unique $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ tel que

$$\begin{cases} \text{si } |z| < R & \text{alors la série numérique } \sum a_n z^n \text{ converge absolument} \\ \text{si } |z| > R & \text{alors la série numérique } \sum a_n z^n \text{ diverge grossièrement} \end{cases} .$$

- R est donné par : $R = \sup \{r \in \mathbb{R}^+ \ / \ (a_n r^n) \text{ bornée dans } \mathbb{C}\}$ (dans $\overline{\mathbb{R}}$)
- R est appelé *le rayon de convergence* de la série entière $\sum a_n z^n$;
- $D_R = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| < R\}$ est *le disque (ouvert) de convergence* de la série entière $\sum a_n z^n$.

Attention ! Pas de résultat général pour $|z| = R$ (cf. $\sum z^n$, $\sum z^n/n$, $\sum z^n/n^2$).

NB : on peut avoir $R = +\infty$ (cf. $\sum z^n/n!$) et on peut avoir $R = 0$ (cf. $\sum n!\, z^n$).

Dém. du théorème :

- *Existence* : soit $\mathcal{E} = \{r \in \mathbb{R}^+ \ / \ (a_n r^n) \text{ bornée dans } \mathbb{C}\}$; $\mathcal{E}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}^+$ ($0 \in \mathcal{E}$), soit donc R la borne supérieure de $\mathcal{E}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$: $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ et, pour $z \in \mathbb{C}$:
  - si $|z| < R$, alors je dispose de $r \in \mathcal{E}$ tel que $|z| < r$ (car $|z|$ n'est pas un majorant de $\mathcal{E}$!) et le lemme d'Abel montre que $\sum a_n z^n$ est absolument convergente ;
  - si $|z| > R$, alors $|z| \notin \mathcal{E}$, donc la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée, d'où la divergence grossière de la série numérique $\sum a_n z^n$.
- *Unicité* : si R et R' étaient deux valeurs distinctes de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ vérifiant les conditions, je pourrais supposer $R < R'$ et considérer un complexe z tel que $R < |z| < R'$ pour obtenir une contradiction.

<u>**Détermination pratique du rayon de convergence**</u> :

- si l'on trouve R tel que : $|z| < R \Rightarrow \sum a_n z^n$ CV, alors le RCV de $\sum a_n z^n$ est <u>au moins égal</u> à R ; si l'on trouve en outre z de module R tel que $\sum a_n z^n$ ne soit pas absolument convergente, alors R est le RCV de $\sum a_n z^n$;
- dans le même esprit, si l'on trouve z tel que que $\sum a_n z^n$ ne soit ***ni*** absolument convergente, ***ni*** grossièrement divergente (par exemple semi-convergente...), alors $R = |z|$;
- soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières et R_a, R_b leurs rayons de convergence respectifs ;
  - $*$ si $a_n = O(|b_n|)$ (*resp.* $|a_n| \leq |b_n|$ à partir d'un certain rang), alors $R_a \geq R_b$;
  - $*$ si $|a_n| \sim |b_n|$, alors $R_a = R_b$;
- penser à utiliser la règle de d'Alembert pour étudier la convergence **absolue** de la série **numérique** $\sum a_n z^n$: si l'on trouve R tel que $\sum a_n z^n$ CVA pour $|z| < R$ et DVG pour $|z| > R$, alors R n'est autre que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

Exemples : 1) Pour tout réel α, le RCV de $\sum n^\alpha z^n$ est égal à 1.

2) Déterminer le RCV de $\sum \dfrac{z^{3n+1}}{2^n}$.

Propriété : les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

3) Continuité de la fonction somme sur le disque ouvert de convergence

Théorème : la fonction somme d'une série entière d'une variable complexe est continue sur le disque **ouvert** de convergence (admis conformément au programme).

4) Opérations algébriques sur les séries entières

- <u>*somme*</u> : soient R_a , R_b , R_{a+b} les RCV respectifs de $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$, $\sum (a_n + b_n) z^n$; alors $R_{a+b} \geq \min(R_a, R_b)$ (avec égalité si $R_a \neq R_b$).
- <u>*produit par un scalaire*</u> : si $\lambda \neq 0$, $\sum \lambda a_n z^n$ a même RCV que $\sum a_n z^n$.
- <u>*produit de Cauchy*</u> (cf. chapitre **3, tous les indices partent de 0**) :

  soient R_a , R_b , R les RCV respectifs de $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$, $\sum\limits_{n\geq 0} b_n z^n$, $\sum\limits_{n\geq 0} c_n z^n$ où : $\forall n \in \mathbb{N} \quad c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$;

  alors pour $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a $\sum c_n z^n$ absolument convergente et :

  $$\sum_{k=0}^{n} c_n z^n = \left(\sum_{k=0}^{n} a_n z^n\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} b_n z^n\right) ;$$

  en particulier, le RCV R_c de $\sum c_n z^n$ est au moins égal à $\min(R_a, R_b)$.

Attention ! Contrairement au cas de la somme, on peut avoir $R_c > \min(R_a, R_b)$ même si $R_a \neq R_b$; voir par exemple le produit d'une somme de série entière par son inverse...

5) Séries entières usuelles d'une variable complexe

- pour tout z dans $\mathbb{C}$ (RCV $+\infty$) :

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \ ; \ \operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \ ; \ \operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \ ; \ \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \ ; \ \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} .$$

- pour $|z| < 1$ (RCV 1) : $\sum\limits_{k=0}^{n} z^n = \dfrac{1}{1-z}$.

<u>*Exercice*</u> : pour $|z| < 1$ et $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{(1-z)^{k+1}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dbinom{n+k}{k} \cdot z^n$.

II - Séries entières d'une variable réelle

1) Généralités *(déduites du § I)*

Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$; la série de fonctions $\sum v_n$ où v_n est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, $v_n : x \mapsto a_n x^n$ est dite *série entière d'une variable réelle*, notée (abusivement) $\sum a_n x^n$.

Si R est le RCV de $\sum a_n z^n$, alors la série numérique $\sum a_n x^n$ est absolument convergente pour $|x| < R$, divergente pour $|x| > R$.

R est aussi appelé *le rayon de convergence de* $\sum a_n x^n$; $]-R, R[$ est *l'intervalle ouvert de convergence.*

L'ensemble de définition D de la fonction somme est parfois appelé *le domaine réel de convergence* de la série entière ($]-R, R[\subset D \subset [-R, R]$).

Opérations algébriques : voir § **I. 4)**

2) Continuité de la fonction somme d'une série entière

Théorème : soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

- la série de fonctions $\sum a_n x^n$ converge normalement sur $[-r, r]$, pour $0 < r < R$;
- la fonction somme $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est continue sur $]-R, R[$;

NB : pas de résultat général en $\pm R$, mais on se rappellera qu'une série entière est avant tout une série de fonctions et qu'on peut donc lui appliquer des théorèmes plus anciens ; on retiendra les trois cas favorables suivants :

$*$ si $\sum |a_n| R^n$ converge, alors la série de fonctions $\sum a_n x^n$ CVN sur $[-R, R]$ (voir par exemple $\sum x^n/n^2$ sur $[-1, 1]$) ;

$*$ si $\sum a_n x^n$ est une série alternée vérifiant les hypothèses du TSSA pour $x \in [0, R]$, alors la série de fonctions $\sum a_n x^n$ CVU sur $[0, R]$ (voir par exemple $\sum (-1)^n x^n/n$ sur $[0, 1]$) ;

$*$ si (a_n) est une suite de réels positifs, $\sum a_n x^n$ est une série alternée pour $x < 0$, voir si elle vérifie les hypothèses du TSSA...

3) Intégration terme à terme

Théorème : soit $\sum a_n x^n$ une série entière de RCV $R > 0$; on a

$$\forall x \in \,]-R, R[\qquad \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} \ ;$$

la série entière $\sum a_n \cdot \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ a aussi R pour RCV.

Exemples : développement en série entière de $\ln(1 + x)$, de $\arctan x$.

NB : le théorème précédent fournit ces développements en série entière sur $]-1, 1[$; on peut toutefois étendre — grâce à la converge uniforme de la série de fonctions associée, établie à l'aide de la majoration du reste découlant du théorème spécial des séries alternées — le développement en série entière de $\ln(1 + x)$ à l'intervalle $]-1, 1]$ (divergence grossière en -1), celui de $\arctan x$ au segment $[-1, 1]$ (fonction impaire !).

4) Dérivation terme à terme

Théorème : soit $\sum a_n x^n$ une série entière de RCV $R>0$ et f la fonction somme :

$$\forall x\in\,]-R,R[\quad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\ ;$$

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$ avec, pour tout $x\in\,]-R,R[$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,a_{n+1}x^n\ ;\\
f''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\,a_n x^{n-2}=\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)\,a_{n+1}x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)\,a_{n+2}x^n\ ;\\
\forall p\in\mathbb{N}^*\quad f^{(p)}(x) &= \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\dots(n-p+1)\,a_n x^{n-p}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+p)!}{n!}a_{n+p}x^n
\end{aligned}$$

toutes les “séries dérivées” ont aussi R pour RCV.

Corollaire : soit $\sum a_n x^n$ une série entière de RCV $R>0$ et $f: x\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$; alors

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

<u>**Conséquences**</u> :

1) si les sommes de deux séries entières coïncident sur un intervalle de la forme $]-\delta,\delta[$ alors ces deux séries entières ont les mêmes coefficients ;

2) la fonction somme d'une série entière est paire (*resp.* impaire) si et seulement si tous les coefficients de rang impair (*resp.* pair) sont nuls.

5) Développement en série entière

Définition : une fonction f est dite *développable en série entière en* 0 si et seulement s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de RCV $R>0$ et $\delta>0$ tels que

$$\forall x\in\,]-\delta,\delta[\quad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

(pour un DSE en a, considérer la fonction $h\mapsto f(a+h)$).

<u>**Condition nécessaire**</u> : si f est développable en série entière en 0, alors il existe $\delta>0$ tel que f soit de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\delta,\delta[$ et l'on a :

$$\forall x\in\,]-\delta,\delta[\quad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n$$

(f est la somme de sa *série de Taylor*, dite aussi *série de Mac-Laurin*).

Attention ! f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0 **ne suffit pas** pour que f soit développable en série entière en 0 (voir par exemple $f: x\mapsto e^{-1/x^2}$, prolongée par 0 en 0, qui est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, non nulle, alors que sa série de Taylor est nulle...)

6) Développements en série entière usuels en 0 : cf. polycopié

7) Exemples d'utilisations

a) Obtention pratique de développements en série entière

À partir des DSE usuels, penser à utiliser les opérations algébriques (combinaisons linéaires, produit de Cauchy), mais aussi intégration et dérivation terme à terme.

Exemple : le DSE de $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$ peut s'obtenir à l'aide d'un produit de Cauchy, ou encore par dérivation de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.

On peut aussi utiliser une équation différentielle vérifiée par la fonction.

Exemple : le DSE de $x \mapsto (1+x)^\alpha$.

b) Solutions d'une équation différentielle développables en série entière

Une équation différentielle étant donnée, on peut chercher des solutions développables en série entière. **Ne pas oublier** de vérifier au moment de la synthèse que le RCV est strictement positif !

Exemple : trouver les solutions DSE de l'équation différentielle (E) $4xy'' + 2y' - y = 0$.

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ la fonction somme d'une série entière, son RCV R étant supposé strictement positif. J'ai :

$$\begin{aligned} \forall x \in \left]-R, R\right[\quad f'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1} x^n \\ x f''(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n\,(n+1)\, a_{n+1} x^n \end{aligned}$$

donc f est solution de (E) si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 4n\,(n+1)\, a_{n+1} + 2\,(n+1)\, a_{n+1} - a_n = 0,$$

soit si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \frac{a_0}{(2n)!}\ ;$$

or $\sum \dfrac{x^n}{(2n)!}$ a pour RCV $+\infty$: (E) admet donc une droite vectorielle de solutions DSE, engendrée par la fonction

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \begin{cases} \operatorname{ch} \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ \cos \sqrt{-x} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

c) Exemples de calcul de la somme d'une série entière (penser à préciser le RCV)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos n\theta \cdot x^n \ ; \ \sum_{n=0}^{\infty} \left(n^2+1\right) \cdot 2^{n+1} \cdot x^n \ ; \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{3^n.n!} \cdot x^n \ ;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2 \ ; \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

d) Pour montrer qu'une fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ ...

... il suffit de trouver une série entière dont la somme coïncide avec f !

Exemples : $x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{x}$; $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$; $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x-1}$.