5. Suites et séries de fonctions

Sauf indication contraire, I désigne un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{K}$ représente $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I - Diverses notions de convergence

1) Convergence simple, convergence uniforme d'une suite de fonctions

Définitions
Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de I dans $\mathbb{K}$ et $f : I \to \mathbb{K}$.

1) On dit que *la suite de fonctions* (f_n) *converge simplement* (CVS) *vers* f *sur* I si et seulement si, pour tout x de I, la suite numérique $\big(f_n(x)\big)$ converge vers $f(x)$ (la *convergence simple* est aussi appelée *convergence ponctuelle* ou *convergence point par point*).

Autrement dit, (f_n) CVS vers f sur I si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in I \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

où n_0 dépend de ε **et de** x.

2) On dit que *la suite de fonctions* (f_n) *converge uniformément* (CVU) *vers* f *sur* I si et seulement si

$$\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(ce qui suppose que $f_n - f$ est bornée à partir d'un certain rang). Cette propriété équivaut à

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \Rightarrow \big(\forall x \in I \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\big)$$

où n_0 dépend de ε, **mais ne dépend pas de** x.

NB : lorsque (f_n) converge uniformément vers f sur I avec les f_n bornées sur I, alors f est également bornée sur I et la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) vers f sur I n'est autre que la convergence dans l'espace vectoriel normé $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$ muni de la norme N_∞, appelée *norme de la convergence uniforme*. La notation N_∞ a le défaut de ne pas faire apparaître l'intervalle I...

Propriété : si (f_n) converge uniformément vers f sur I, alors (f_n) converge simplement vers f sur I.

Attention ! Réciproque fausse !

<u>*Exemple*</u> : soit, pour tout n de $\mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto x^n$;

- (f_n) CVS sur $[0,1]$ vers $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ (voir la suite numérique (x^n) *pour* x *fixé*).
- (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0,1]$: s'il y avait CVU, ce serait vers f ; or, pour tout n, $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1$.
- Pour $\alpha \in]0,1[$, (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[0,\alpha]$: en effet $\sup\limits_{x\in[0,\alpha]} |f_n(x) - f(x)| = \alpha^n$.
- **Il ne suffit pas** d'écarter la valeur 1 : pas de CVU sur $[0,1[$ puisque

$$\sup_{x\in[0,1[} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1[} x^n = 1.$$

Remarques pratiques

1) Plan d'étude standard pour étudier une suite de fonctions (f_n) sur I

* CVS : **fixer** x dans I et étudier la suite numérique $\Big(f_n(x)\Big)$, ce qui fournit f le cas échéant (si nécessaire, distinguer différents cas selon la valeur de x) ;
* CVU : si (f_n) CVS vers f sur I, **fixer** n dans $\mathbb{N}$ et chercher un majorant de $|f_n(x) - f(x)|$ **indépendant de** x, δ_n, tel que la suite numérique (δ_n) converge vers 0 ; en cas de succès, on a la CVU puisque $\sup\limits_I |f_n - f| \leq \delta_n$. On peut éventuellement déterminer la valeur exacte de $\sup\limits_I |f_n - f|$, par exemple en étudiant les variations de $f_n - f$, lorsque $E = \mathbb{R}$ (comparer alors le sup des valeurs positives et l'inf des valeurs négatives, puisque c'est $\sup\limits_I |f_n - f|$ que l'on cherche !).

2) *Pour nier la convergence uniforme* de (f_n) vers f sur I, il suffit d'exhiber une suite (x_n) d'éléments de I telle que la suite numérique $\Big(f_n(x_n) - f(x_n)\Big)$ ne converge pas vers 0.

En effet, si (f_n) CVU vers f sur I, alors pour toute suite (x_n) d'éléments de I

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \sup_I |f_n - f|$$

et donc $\big(f_n(x_n) - f(x_n)\big)$ converge vers 0.

3) En l'absence de convergence uniforme sur I (par exemple si les f_n ne sont pas bornées), on peut parfois établir la convergence uniforme sur certaines parties de I (en mettant à l'écart les points qui posent problème... Voir les exemples).

Exemples :

1) Sur $I = \mathbb{R}^+$ soit, pour tout n de $\mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \dfrac{nx}{1+nx}$;

* (f_n) CVS sur $\mathbb{R}^+$ vers $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ (voir la suite numérique $\Big(f_n(x)\Big)$ *pour x fixé*).
* (f_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^+$, ni sur $\mathbb{R}^{+*}$: s'il y avait CVU, ce serait vers f ; or, pour $x_n = \dfrac{1}{n}$, $|f_n(x_n) - f(x_n)| = \dfrac{1}{2}$.
* Pour $a > 0$, (f_n) converge uniformément vers 1 sur $[a, +\infty[$: en effet, pour n fixé

$$\forall x \in [a, +\infty[\quad |f_n(x) - 1| = \frac{1}{1+nx} \leq \frac{1}{1+na}$$

et $\delta_n = \dfrac{1}{1+na}$ est un majorant indépendant de x qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et, sur $I = \mathbb{R}^+$ soit, pour tout n de $\mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto n^\alpha x e^{-nx}$;

* (f_n) CVS sur $\mathbb{R}^+$ vers 0 ;
* Pour étudier la convergence uniforme, je fixe n et j'essaie de trouver un majorant de $f_n(x)$ indépendant de x : une majoration banale est improbable (produit d'une fonction croissante par une fonction décroissante) d'où l'idée d'étudier les variations de f_n ; il vient :

$$\sup_{\mathbb{R}^+} |f_n| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^{\alpha-1}}{e}.$$

Conclusion : (f_n) converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $\alpha < 1$.

* Pour $a > 0$, (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[a, +\infty[$: en effet, pour n suffisamment grand, $a > \dfrac{1}{n}$ et alors f_n décroît sur $[a, +\infty[$ d'où

$$\forall x \in [a, +\infty[\quad |f_n(x)| \leq f_n(a)$$

or $f_n(a)$ est indépendant de x et tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, cela quel que soit α.

Attention ! Certaines propriétés à caractère *ponctuel* (comme positive, paire, périodique, croissante...) se transmettent à la limite par convergence simple (par exemple : "si la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers f sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et si les f_n sont croissantes sur I, alors f est croissante sur I").
Mais une suite de fonctions continues peut converger simplement vers une fonction discontinue (ça s'arrange avec la convergence uniforme : voir § **II**).

2) Convergence simple, uniforme, normale d'une série de fonctions

Notations : comme pour définir les séries numériques, à toute suite (f_n) de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ on associe la *série de fonctions* $\sum f_n$ et la *suite des sommes partielles* (S_p) associée, qui est la suite de fonctions définie par

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in I \quad S_p(x) = \sum_{n=0}^{p} f_n(x).$$

Définition : soit (f_n) une suite d'applications de I dans $\mathbb{K}$. On dit que *la série de fonctions* $\sum f_n$ *converge simplement (*resp. *uniformément) sur* I si et seulement si la suite (S_p) des sommes partielles converge simplement (*resp.* uniformément) sur I.

En cas de convergence, *la fonction somme* S de la série de fonctions $\sum f_n$ est définie par

$$\forall x \in I \quad S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \quad \left(= \lim_{p\to\infty} S_p(x)\right) \quad \text{et l'on écrit} \quad S = \sum_{n=0}^{\infty} f_n.$$

Propriété : si $\sum f_n$ converge simplement sur I, alors on dispose de la *suite des restes* (R_p), suite de fonctions définie par

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in I \quad R_p(x) = \sum_{n=p+1}^{\infty} f_n(x)$$

et la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I si et seulement si la suite des restes (R_p) converge uniformément vers 0 sur I.

Dém. Si $\sum f_n$ converge simplement sur I, soit S la fonction somme, alors $\sum f_n$ converge uniformément sur I si et seulement si la suite de fonctions (S_p) converge uniformément vers S sur I, or

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \sup_I |S_p - S| = \sup_I |R_p|$$

et donc (S_p) converge uniformément vers S sur I si et seulement si la suite de fonctions (R_p) converge uniformément vers 0 sur I.

Théorème et définition : soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$.

- On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ *converge normalement* (CVN) *sur* I si et seulement si la série numérique $\sum \sup_I |f_n|$ converge (*i.e.* $\sum N_\infty(f_n)$ converge, d'où le nom de convergence normale).
- Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I, alors elle converge uniformément sur I.

Attention ! Réciproque fausse ! (voir ci-dessous $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot x^n$ sur $[0,1]$)

Dém. Supposons que $\sum f_n$ converge normalement sur I ; alors $\sum f_n$ converge simplement sur I, car pour tout x de I, la série numérique $\sum f_n(x)$ est absolument convergente ($|f_n(x)| \leq \sup_I |f_n|$).

Pour montrer la convergence uniforme, je considère la suite (de fonctions) (R_p) des restes de la série de fonctions $\sum f_n$ et la suite (numérique) (r_p) des restes de la série numérique $\sum \sup_I |f_n|$.

(r_p) converge vers 0 par hypothèse, or

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in I \quad \forall N > p \qquad \left|\sum_{n=p+1}^{N} f_n(x)\right| \leq \sum_{n=p+1}^{N} |f_n(x)| \leq \sum_{n=p+1}^{N} \sup_I |f_n| \leq r_p$$

d'où, par passage à la limite pour $N \to \infty$: $\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in I \quad |R_p(x)| \leq r_p$, d'où $\sup_I |R_p| \leq r_p$.

Il en résulte que la suite de fonctions (R_p) converge uniformément vers 0 sur I et la propriété précédente s'applique.

Remarques pratiques

1) Plan d'étude standard pour étudier une série de fonctions $\sum f_n$ sur I

- Étudier d'abord la CVN : **fixer** n dans $\mathbb{N}$ et chercher un majorant de $|f_n(x)|$ **indépendant de** x, u_n, tel que la série numérique $\sum u_n$ converge (étudier éventuellement les variations de f_n).
- En cas d'échec, étudier la CVS (**fixer** x dans I et étudier la série numérique $\sum f_n(x)$) puis la CVU (chercher un majorant de $|R_p(x)|$ **indépendant de** x, δ_n, tel que la suite numérique (δ_n) converge vers 0 – penser au théorème spécial des séries alternées !).

2) Pour nier la CVU, il suffit de montrer que la *suite* de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers 0 (en effet, si la série de fonctions $\sum f_n$ CVU, alors la suite de fonctions (f_n) CVU vers 0, puisque $f_n = R_{n-1} - R_n \ldots$).

Attention ! Réciproque fausse, voir exemple **3)** ci-dessous.

Exemples :

1) Soit $\alpha > 0$ et, sur $I = [0,1]$ soit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} \cdot x^n$; $\sup\limits_{[0,1]} |f_n| = \dfrac{1}{n^\alpha}$.

- Pour $\alpha > 1$, $\sum f_n$ CVN sur $[0,1]$ (donc CVU et CVS !).
- Pour $0 < \alpha \leq 1$, pas de CVN sur $[0,1]$, mais pour x fixé dans $[0,1]$ la série numérique $\sum f_n(x)$ vérifie le théorème spécial des séries alternées, d'où la convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$ et la majoration du reste :
$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in [0,1] \quad |R_p(x)| \leq |f_{p+1}(x)| = \frac{x^{p+1}}{(p+1)^\alpha} \leq \frac{1}{(p+1)^\alpha} \ ;$$
ce majorant est indépendant de x et tend vers 0 lorsque p tend vers l'infini, donc la suite de fonctions (R_p) converge uniformément vers 0 sur $[0,1]$: ainsi la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ (alors qu'ici elle ne converge pas normalement...).

2) Sur $I = \mathbb{R}^+$ soit, pour tout n de $\mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \dfrac{nx^2}{n^3 + x^2}$.

- Déjà, pour tout $n \geq 1$, $\sup\limits_{\mathbb{R}^+} |f_n| \geq f_n(n) = \dfrac{n^3}{n^3 + n^2} \geq \dfrac{1}{2}$: il n'y a donc, pour la série $\sum f_n$, ni CVN sur $\mathbb{R}^+$ ($\sum \sup\limits_{\mathbb{R}^+} |f_n|$ DV grossièrement) ni même CVU sur $\mathbb{R}^+$ (la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers 0, cf. la remarque **2)** ci-dessus).
- Toutefois (et cela peut être bien utile, voir § **II**), pour tout $M > 0$, $\sum f_n$ converge normalement sur $[0,M]$, puisque
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in [0,M] \quad |f_n(x)| \leq \frac{M^2}{n^2}$$
d'où la convergence de $\sum \sup\limits_{[0,M]} |f_n|$; *a fortiori*, $\sum f_n$ converge uniformément et simplement sur $[0,M]$, cela pour tout $M > 0$.
- Du résultat précédent, je déduis que $\sum f_n$ CVS sur $\mathbb{R}^+$ (pour x fixé, choisir M tel que $x \in [0,M] \ldots$) mais...

Attention ! La convergence uniforme sur $[0,M]$ pour tout $M > 0$ n'entraîne pas la convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$ (voir contre-exemple ci-dessus !).

3) Sur $I = \mathbb{R}^+$ soit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \dfrac{x}{1 + n^2x^2}$.

- L'étude des variations de f_n montre que, pour tout $n \geq 1$,
$$\sup_{\mathbb{R}^+} |f_n| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n} \ ;$$
il n'y a donc pas CVN pour $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$ ($\sum \sup\limits_{\mathbb{R}^+} |f_n|$ DV par comparaison à une série de Riemann).

* Toutefois, toujours dans le même esprit, pour $0 < a < M$, $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, M]$, puisque
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in [a, M] \quad |f_n(x)| \leq \frac{M}{1 + a^2n^2}$$
d'où la convergence de $\sum \sup_{[a,M]} |f_n|$. J'en déduis comme ci-dessus la convergence simple sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc sur $\mathbb{R}^+$ puisque la série $\sum f_n(0)$ converge trivialement.

* L'étude de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$ est ici plus délicate ; je montre qu'il n'y a pas CVU en minorant les restes : fixons $p \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$,
$$\forall N > p \quad R_p(x) \geq \sum_{n=p+1}^{N} f_n(x) = x \sum_{n=p+1}^{N} \frac{1}{1 + n^2x^2} \geq x \cdot \frac{N - p}{1 + N^2x^2}$$
d'où
$$\sup_{\mathbb{R}^+} |R_p| \geq R_p\left(\frac{1}{N}\right) \geq \frac{N - p}{2N} \text{ , cela pour tout } N > p \text{ ;}$$
il en résulte (en faisant tendre N vers l'infini) que :
$$\sup_{\mathbb{R}^+} |R_p| \geq \frac{1}{2}$$
donc la suite de fonctions (R_p) ne converge pas uniformément vers 0.

On a donc ici un exemple où la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas uniformément tandis que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers 0.

II - Transmission (ou pas) de la régularité

1) Interversion de limites

Attention ! C'est un vrai problème ! ! $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \left(\lim\limits_{n\to\infty} x^n\right) = 0$ alors que $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} x^n\right) = 1$

Théorème : soient $a \in I$ et (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$, toutes continues en a.

a) Si la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur I, alors f est continue en a.

b) Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I, alors la fonction somme S est continue en a.

<u>**Théorème de la double limite**</u>

Soient a un point **adhérent à** I (a réel ou $a = \pm\infty$ lorsque I est une demi-droite ou $\mathbb{R}$ tout entier) et (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ telle que, pour tout n, f_n admet en a une limite finie $b_n \in \mathbb{K}$.

1) Si la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur I, alors la suite numérique (b_n) converge dans $\mathbb{K}$ vers une limite b et f admet b pour limite en a.

2) Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I, alors la série numérique $\sum b_n$ converge et la fonction somme $S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ admet $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ pour limite en a.

NB : les résultats ci-dessus correspondent bien à une interversion de deux limites (ou à l'interversion d'une limite et d'une somme de série), puisqu'ils s'écrivent
$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a}\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right).$$

Attention ! Bien justifier la CVU (généralement obtenue dans le cas des séries par CVN ou grâce à la majoration du reste associée au TSSA).

2) Transmission de la continuité par convergence uniforme

Théorème : soit (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$, toutes continues sur I.

a) Si la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur I, alors f est continue sur I.

b) Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I, alors la fonction somme S est continue sur I.

NB : penser, s'il n'y a pas CVU sur I, à utiliser la CVU sur certains sous-intervalles de I (noter que la continuité est une notion **locale**, donc si par exemple f est continue sur tout segment $[a, M]$, avec $0 < a < M$, on en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$; attention en 0 dans ce cas...).

Exemples :

1) Les résultats précédents peuvent permettre de nier rapidement la CVU : si une suite de fonctions continues CVS vers une fonction discontinue, il ne peut pas y avoir CVU ! (voir par exemple $f_n : x \mapsto x^n$ sur $[0,1]$...).

2) *Fonction exponentielle* : $x \mapsto e^x$ est la fonction somme d'une série de fonctions continues qui converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$; elle est donc continue sur $\mathbb{R}$ (on peut montrer que la fonction exponentielle est continue de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, cf. le chapitre 6...).

3) Intégration sur un segment des suites et séries de fonctions continues

Théorème : soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{K})$.

1) Si la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$, alors la suite numérique $\left(\int_{[a,b]} f_n\right)$ converge et

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{[a,b]} f_n(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_{[a,b]} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{[a,b]}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t.$$

2) Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$, alors la série numérique $\sum \int_{[a,b]} f_n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{[a,b]} f_n(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_{[a,b]}\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t \quad \textit{(intégration terme à terme).}$$

Attention ! La convergence simple n'est pas suffisante, la convergence uniforme est suffisante mais pas nécessaire (voir selon les valeurs de α la suite des (f_n) où $f_n : x \mapsto n^\alpha x^n (1-x)$ sur $[0,1]$).

Exemples

1) Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \ln x.\ln(1-x)\,\mathrm{d}x$ en écrivant

$$f : x \mapsto \begin{cases} \ln x.\ln(1-x) & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{si } x \in \{0,1\} \end{cases}$$

comme somme d'une série de fonctions :

$$\forall x \in [0,1] \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad \text{où} \quad \forall n \geq 1 \quad u_n : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{-x^n}{n} \cdot \ln x & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

2) Établir : $\displaystyle\int_0^1 x^x \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

4) Suites et séries de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Attention ! On peut avoir une suite de fonctions dérivables qui converge uniformément vers une fonction non dérivable : cf. le théorème de Weierstrass (hors programme), qui fournit une suite de polynômes (de classe $\mathcal{C}^\infty$!) convergeant uniformément vers n'importe quelle fonction continue sur un segment.
On peut aussi avoir une suite (f_n) de fonctions dérivables qui converge uniformément vers une fonction dérivable f alors que (f_n') ne converge pas vers f' (voir par exemple $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{n}\sin nx$).

Théorème : soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{K})$ telle que :

* (f_n) converge simplement vers f sur I ;
* (f_n') converge **uniformément** vers g sur I ;

alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = g$ (*i.e.* $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim\limits_{n\to\infty}(f_n')$).

NB : sous ces mêmes hypothèses, (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment de I.

Théorème : soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{K})$ telle que :

* $\sum f_n$ converge simplement sur I ;
* $\sum f_n'$ converge **uniformément** sur I ;

alors $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n\right)' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n'$ *(dérivation terme à terme).*

NB : penser, s'il n'y a pas CVU sur I, à utiliser la CVU sur certains sous-intervalles de I (noter que la continuité et la dérivabilité sont des notions **locales**, donc si par exemple f est $\mathcal{C}^1$ sur toute demi-droite $[a,+\infty[$, avec $a>0$, on en déduit que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$; attention en 0...).

Exemples :

1) Pour z dans $\mathbb{C}$, la fonction $e_z : t \mapsto e^{tz}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{D}e_z = z.e_z$; *i.e.* $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{zt}\right) = z.e^{zt}$.

2) Montrer que $f : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}\cdot\cos^n x\cdot\sin nx$ est définie sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]k\pi,(k+1)\pi[$ pour tout k dans $\mathbb{Z}$; déterminer f', en déduire f.

5) Suites et séries de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ (k entier, $k \geq 2$)

Théorème : soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{C}^k(I,\mathbb{K})$ telle que :

* pour tout j tel que $0 \leq j \leq k-1$, $\left(f_n^{(j)}\right)$ converge simplement sur I vers g_j ;
* $\left(f_n^{(k)}\right)$ converge **uniformément** sur I vers g_k ;

alors $f = g_0$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et : $\forall j \in [\![1,k]\!] \quad f^{(j)} = g_j$, autrement dit

$$\forall j \in [\![1,k]\!] \quad \forall x \in I \quad f^{(j)}(x) = \lim_{n\to\infty} f_n^{(j)}(x)\,.$$

Théorème : soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{C}^k(I,\mathbb{K})$ telle que :

* pour tout j tel que $0 \leq j \leq k-1$, $\sum f_n^{(j)}$ converge simplement sur I ;
* $\sum f_n^{(k)}$ converge **uniformément** sur I ;

alors $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et : $\forall j \in [\![1,k]\!] \quad \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n\right)^{(j)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n^{(j)}$.

NB : là encore penser à utiliser une famille de sous-intervalles de I...

6) La fonction ζ (zeta) de Riemann *(hors programme mais très classique)*

Le résultat classique sur les séries de Riemann montre que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$, où $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$, converge simplement sur $]1,+\infty[$; la fonction somme est notée ζ.

$$\forall x \in]1,+\infty[\quad \zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

$\sup_{]1,+\infty[} |f_n| = \frac{1}{n}$: il n'y a donc pas CVN sur $]1,+\infty[$; il n'y a pas non plus CVU sur $]1,+\infty[$: cela découle du théorème de la double limite, puisque pour tout n $\lim_1 f_n = \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n}$ diverge !

Pour montrer la continuité de ζ sur $]1,+\infty[$, je constate que $\sum f_n$ CVN, donc CVU sur $[a,+\infty[$, cela pour tout $a > 1$ (en effet $\sup_{[a,+\infty[} |f_n| = \frac{1}{n^a}$ et la série numérique $\sum \frac{1}{n^a}$ converge). Comme les f_n sont continues et que $\sum f_n$ CVU sur $[a,+\infty[$, la fonction somme ζ est continue sur $[a,+\infty[$, cela pour tout $a > 1$. Il en résulte que ζ est continue sur $]1,+\infty[$ (tout point x de $]1,+\infty[$ se trouve dans $[a,+\infty[$ si je choisis a tel que $1 < a < x$).

Le théorème de la double limite fournit la limite de ζ en $+\infty$: en effet, $\sum f_n$ CVN donc CVU sur $[2,+\infty[$ et, pour tout n, f_n admet une limite b_n en $+\infty$ (qui est une extrémité de $[2,+\infty[$!) ; précisément $b_1 = 1$ et $b_n = 0$ pour $n \geq 2$; la conclusion apportée par le théorème de la double limite est la suivante : la série numérique $\sum b_n$ converge (ici ce n'est pas une grande nouvelle) et la fonction somme ζ admet $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ pour limite en $+\infty$; ainsi $\lim_{+\infty} \zeta = 1$.

Pour préciser le comportement de ζ au voisinage de 1, j'introduis $g_n : x \mapsto \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ et $\eta = \sum_{n=1}^{\infty} g_n$; la majoration du reste dans le cadre du TSSA permet de montrer que $\sum g_n$ CVU sur $[a,+\infty[$, cela pour tout $a > 0$; en effet, pour x fixé dans $[a,+\infty[$, $|g_n(x)|$ décroît et tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, donc, avec les notations habituelles,

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad |R_p(x)| \leq |g_{p+1}(x)| \leq \frac{1}{(p+1)^a}$$

or la suite numérique $\left(\frac{1}{(p+1)^a}\right)$ converge vers 0, donc la suite de fonctions (R_p) CVU vers 0 sur $[a,+\infty[$. J'en déduis que η est continue sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > 0$, donc sur $]0,+\infty[$.

Or ζ et η sont liées par une relation classique, obtenue en séparant les termes d'indices pairs et impair :

$$\forall x > 1 \quad \zeta(x) - \eta(x) = 2\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p)^x} = 2^{1-x} \cdot \zeta(x) \quad \text{d'où} \quad \zeta(x) = \frac{\eta(x)}{1-2^{1-x}},$$

or η est continue en 1 et $\eta(1) = \ln 2$ (classique...), d'où : $\zeta(x) \underset{x\to 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}$.

Montrons enfin que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$: pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, en vertu des théorèmes opératoires classiques, $f_n : x \mapsto e^{-x \ln n}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad \forall x > 0 \quad f_n^{(j)}(x) = (-\ln n)^j e^{-x \ln n} = (-1)^j \frac{(\ln n)^j}{n^x}.$$

Connaissant les séries de Bertrand, je fixe $a > 1$, $k \in \mathbb{N}^*$ et j'applique le théorème sur les séries de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur la demi-droite $[a,+\infty[$:

- les f_n sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a,+\infty[$
- pour tout j tel que $0 \leq j \leq k-1$, $\sum f_n^{(j)}$ converge simplement sur $[a,+\infty[$;
- $\sum f_n^{(k)}$ converge **uniformément** sur $[a,+\infty[$.

En effet, pour tout j, $\sum f_n^{(j)}$ converge normalement sur $[a,+\infty[$ puisque $\sup_{[a,+\infty[} \left|f_n^{(j)}\right| = \frac{(\ln n)^j}{n^a}$, or le résultat (classique) sur les séries de Bertrand montre que $\sum \frac{(\ln n)^j}{n^a}$ converge puisque $a > 1$.

En conclusion, ζ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a,+\infty[$, cela pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a,+\infty[$, cela pour tout $a > 1$, donc ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$.