4. Espaces vectoriels normés

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I - Normes sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Convergence des suites

1) Vocabulaire. Premières propriétés.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- N est *une norme sur E* si et seulement si N est une application de E dans $\mathbb{R}^+$ telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in E \quad N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 & \textit{(séparation)} \\ \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall x \in E \quad N(\lambda.x) = |\lambda|\, N(x) & \textit{(homogénéité)} \\ \forall (x,y) \in E^2 \quad N(x+y) \leq N(x) + N(y) & \textit{(inégalité triangulaire)} \end{cases}.$$

  On dit dans ce cas que (E, N) est un *espace vectoriel normé* (s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le choix de la norme, on parle de l'espace vectoriel normé E).

- d est *une distance sur E* si et seulement si d est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que :

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in E^2 \quad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y & \textit{(séparation)} \\ \forall (x,y) \in E^2 \quad d(y,x) = d(x,y) & \textit{(symétrie)} \\ \forall (x,y,z) \in E^2 \quad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) & \textit{(inégalité triangulaire)} \end{cases}.$$

Théorème et définition : si N est une norme sur E, $d : (x,y) \mapsto N(y-x)$ est une distance sur E, appelée *la distance associée à N*.

Dans la suite, $\|\cdot\| : x \mapsto \|x\|$ désigne une norme sur E.

- On appelle *vecteur unitaire* (ou *normé*) tout vecteur de norme 1. À tout vecteur x non nul on peut associer le vecteur unitaire $\dfrac{1}{\|x\|} \cdot x$ qui dirige la même droite (*resp.* demi-droite dans le cas réel).
- Pour $a \in E$, $r \in \mathbb{R}^{+*}$, *la boule ouverte de centre a et de rayon r* est $B(a,r) = \{x \in E \ / \ \|x-a\| < r\}$, *la boule fermée de centre a et de rayon r* est $B_f(a,r) = \{x \in E \ / \ \|x-a\| \leq r\}$, *la sphère de centre a et de rayon r* est $S(a,r) = \{x \in E \ / \ \|x-a\| = r\}$.
- Une partie A de E est dite *bornée* si et seulement s'il existe une boule la contenant, *i.e.* :

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ \quad \forall x \in A \quad \|x\| \leq M.$$

- Si D est un ensemble non vide, une application $f : D \to E$ est dite *bornée* si et seulement si $f(D)$ est bornée dans E, *i.e.* :

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ \quad \forall x \in D \quad \|f(x)\| \leq M.$$

- *Distance d'un point à une partie non vide* : pour A partie non vide de E et x élément de E, on appelle *distance de x à A* le réel positif ou nul

$$d(x,A) = \inf\{\|x-a\|,\ a \in A\}.$$

- Soit $f : E \to F$, N une norme sur F, $k \in \mathbb{R}^+$; f est dite *k-lipschitzienne* si et seulement si

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad N\big(f(x) - f(y)\big) \leq k.\|x-y\| \ ;$$

  f est dite *lipschitzienne* si et seulement s'il existe k tel que f soit k-lipschitzienne.

Propriétés

1) Si $\|\cdot\|$ est une norme sur E, l'application $x \mapsto \|x\|$ est 1-lipschitzienne de $(E, \|\cdot\|)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$:

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad \big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x-y\| \ \textit{(inégalité triangulaire “bis”)}.$$

2) Si A est une partie non vide de E, l'application $x \mapsto d(x,A)$ est 1-lipschitzienne de $(E, \|\cdot\|)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

3) *Composition d'applications lipschitziennes* : si $f : E \to F$ est k-lipschitzienne et $g : F \to G$ ℓ-lipschitzienne, alors $g \circ f : E \to G$ est $k\ell$-lipschitzienne.

2) Parties convexes

Étant donné $(a,b) \in E^2$, *le segment* $[a,b]$ est l'ensemble des $(1-t).a + t.b$, $t \in [0,1]$.

NB : en remplaçant t par $1-u$, on constate que $[b,a] = [a,b]$; d'ailleurs il n'y a en général pas de relation d'ordre "naturelle" dans E...

Une partie A de E est dite *convexe* si et seulement si, pour tout (a,b) de A^2, $[a,b]$ est inclus dans A.

Propriété : les boules de E sont **des** parties convexes.

NB : **les** parties convexes de $\mathbb{R}$ sont **les** intervalles.

3) Suites convergentes, suites divergentes

Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $E^{\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de E et ℓ un vecteur de E ; on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* ℓ *dans* $(E, \|\cdot\|)$ (ou encore *pour la norme* $\|\cdot\|$) si et seulement si la suite **numérique** $(\|u_n - \ell\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \|u_n - \ell\| \leq \varepsilon.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *convergente dans* $(E, \|\cdot\|)$ (ou *pour la norme* $\|\cdot\|$) si et seulement s'il existe un vecteur ℓ de E tel que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
Si c'est le cas, ℓ est **unique** ; ℓ est *la limite* de la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, notée $\lim u$ ou $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.
On écrit aussi : $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$.
Sinon, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *divergente.*

NB : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si et seulement si $(u_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 : on se ramène ainsi souvent au cas de la limite nulle.

Propriété : toute suite convergente est bornée (réciproque fausse !).

Opérations algébriques sur les suites convergentes

L'ensemble $\mathcal{C}$ des suites de vecteurs de E convergentes dans $(E, \|\cdot\|)$ est un sous-espace de $E^{\mathbb{N}}$ et l'application qui à toute suite de $\mathcal{C}$ associe sa limite est une application linéaire de $\mathcal{C}$ dans E.

4) Suites extraites

Définition : on appelle *suite extraite* (ou *sous-suite*) d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E toute suite de la forme $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, où φ est une application **strictement croissante** de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ (en particulier $\lim\limits_{+\infty} \varphi = +\infty$).

Propriété : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors toute suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la même limite.

NB : cette propriété peut permettre de nier facilement la convergence d'une suite (cf. $(-1)^n$).

Définition : on appelle *valeur d'adhérence* d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E, tout élément a de E tel qu'il existe une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers a *(terme hors programme mais naguère apparu dans un sujet d'écrit...).*

5) Normes équivalentes *(complément hors programme)*

Propriété : soient N et N' deux normes sur E ; pour que toute suite convergeant vers 0 au sens de N converge également vers 0 au sens de N', il faut et il suffit qu'il existe un nombre réel $\alpha > 0$ tel que $N' \leq \alpha N$ (*i.e.* $\forall x \in E \quad N'(x) \leq \alpha N(x)$ avec α *indépendant de* x).

Dém. S'il existe $\alpha > 0$ tel que $N' \leq \alpha N$, il est clair que pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 0 au sens de N, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers 0 au sens de N', en vertu du théorème d'encadrement, puisque : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq N'(u_n) \leq \alpha N(u_n)$.
Pour prouver la réciproque, je procède par contraposition : je suppose que

$$\forall \alpha > 0 \quad \exists x \in E \quad N'(x) > \alpha N(x).$$

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, cette hypothèse me fournit (en prenant $\alpha = n+1$) un vecteur x_n de E tel que

$$N'(x_n) > (n+1)\,N(x_n) \quad \text{(nécessairement, } x_n \text{ est non nul).}$$

Je pose alors : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \dfrac{1}{N'(x_n)} \cdot x_n$ et je constate que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad N(u_n) < \dfrac{1}{n+1}$ et $N'(u_n) = 1$.
Ainsi, il existe au moins une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 au sens de N, mais pas au sens de N', ce qui achève la démonstration.

Définition : deux normes N et N' sur un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel E sont dites *équivalentes* si et seulement s'il existe deux réels strictement positifs α et β tels que $N' \leq \alpha N$ et $N \leq \beta N'$.

Théorème : soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$; si N et N' sont deux normes équivalentes sur E, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$ au sens de N si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ au sens de N'.

Ainsi, pour montrer que deux normes N et N' **ne sont pas** équivalentes, il suffit d'exhiber une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E telle que l'une des deux suites numériques $\big(N(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, $\big(N'(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et pas l'autre.

NB : nous verrons que **toutes les normes sont équivalentes en dimension finie**.

6) Quelques normes usuelles

a) Norme euclidienne associée à un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Rappelons que, si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un *produit scalaire* $(\cdot|\cdot)$ (c'est-à-dire une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E), l'application $x \mapsto \|x\| = \sqrt{(x|x)}$ est une norme sur E, *la norme euclidienne associée au produit scalaire* $(\cdot|\cdot)$.
Nous disposons en outre, pour tout (x,y) de E, des développements :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y) \quad \text{et} \quad \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x|y)$$

qui fournissent l'*identité du parallélogramme :*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

et les *identités de polarisation :*

$$(x|y) = \frac{1}{2}\left[\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right] = \frac{1}{2}\left[\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2\right] = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right]$$

et de *l'inégalité de Cauchy-Schwarz :*

$$|(x|y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \text{(avec égalité si et seulement si } x, y \text{ colinéaires).}$$

b) Normes usuelles sur $\mathbb{K}^p$

Pour $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, on pose :

$$N_1(x) = \sum_{k=1}^{p} |x_k| \quad ; \quad N_2(x) = \sqrt{\sum_{k=1}^{p} x_k^2} \; ; \; N_\infty(x) = \max_{1\leq k\leq p} |x_k| \; .$$

Théorème : N_1 , N_2 et N_∞ sont trois normes sur $\mathbb{R}^p$, équivalentes deux à deux, avec :

$$N_\infty \leq N_2 \leq N_1 \leq \sqrt{p}.N_2 \leq p.N_\infty \; .$$

NB : N_2 est la norme associée au produit scalaire canonique $(x,y) \mapsto \sum_{k=1}^{p} x_k.y_k$.
N_1 et N_∞ sont également définies sur $\mathbb{C}^p$, $|\cdot|$ désignant alors le module.

c) Produit d'espaces vectoriels normés

Plus généralement, étant donnée une famille finie d'espaces vectoriels normés (E_k, N_k), $1 \leq k \leq p$, on peut munir l'espace produit $E = \prod_{k=1}^{p} E_k$ de la norme N_∞ définie par

$$\text{si } x = (x_1, \ldots, x_p) \in E, \; N_\infty(x) = \max_{1\leq k\leq p} N_k(x_k) \, .$$

d) Normes usuelles sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$

Soit a, b réels ($a < b$) et $E = \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on pose :

$$N_1(f) = \int_a^b |f| \ ; \quad N_2(f) = \sqrt{\int_a^b f^2} \ ; \quad N_\infty(f) = \max_{[a,b]} |f| \, .$$

Théorème : N_1 , N_2 et N_∞ sont trois normes sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, avec :

$$N_1 \leq \sqrt{b-a} N_2 \leq (b-a) N_\infty \ ,$$

mais elles sont deux à deux **non équivalentes** (utiliser $f_n : t \mapsto \left(\dfrac{t-a}{b-a}\right)^n$).
N_1 est dite *norme de la convergence en moyenne sur* $[a,b]$,
N_2 est dite *norme de la convergence en moyenne quadratique sur* $[a,b]$,
N_∞ est dite *norme de la convergence uniforme sur* $[a,b]$.

Dém. pas de difficulté particulière, une fois noté que N_2 est la norme associée au produit scalaire $(f,g) \mapsto \displaystyle\int_a^b f.g$.

NB : N_1 et N_∞ sont également définies sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C})$, $|\cdot|$ désignant alors le module.

e) Norme N_∞ sur l'espace $\ell^\infty(E)$ des suites bornées

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. L'ensemble $\ell^\infty(E)$ des suites bornées d'éléments de E est un sous-espace du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E^{\mathbb{N}}$ et

$$N_\infty : u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto N_\infty(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|$$

est une norme sur $\ell^\infty(E)$.
L'ensemble des suites convergentes d'éléments de E est un sous-espace vectoriel de $\ell^\infty(E)$.

f) Norme N_1 sur l'espace ℓ^1

On note ℓ^1 l'ensemble des suites réelles (u_n) telles que la série $\sum |u_n|$ converge.

Théorème : ℓ^1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $N_1 : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} |u_n|$ est une norme sur ℓ^1.

g) Norme N_2 sur l'espace ℓ^2

On note ℓ^2 l'ensemble des suites réelles (u_n) telles que la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n^2$ converge.

Théorème : ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et l'on définit un produit scalaire sur ℓ^2 en posant,

$$\text{pour } u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \, , \quad (u|v) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n .$$

Ainsi $N_2 : u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n^2\right)^{1/2}$ est une norme euclidienne sur ℓ^2.

Propriété : on a $\ell^1 \subsetneq \ell^2 \subsetneq \ell^\infty(\mathbb{R})$, $N_\infty \leq N_2 \leq N_1$ dans ℓ^1 et $N_\infty \leq N_2$ dans ℓ^2 ; mais N_1 et N_∞ (*resp.* N_2 et N_∞) ne sont pas équivalentes dans ℓ^1 (*resp.* ℓ^2), ni N_1 et N_2 dans ℓ^1.

7) Relations de comparaison entre suites

a) Domination

$(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est *dominée par* $(\alpha_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ si et seulement si :

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \Rightarrow \|u_n\| \leq M. |\alpha_n|$$

On note alors : $u_n = O(\alpha_n)$ *(lire "grand O" de* α_n*).*

NB : si (α_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang, $u_n = O(\alpha_n)$ signifie que $\left(\frac{1}{\alpha_n} \cdot u_n\right)$ est bornée.

Exemple : $u_n = O(1)$ signifie que (u_n) est bornée.

b) Prépondérance – négligeabilité

$(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est *négligeable devant* $(\alpha_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \Rightarrow \|u_n\| \leq \varepsilon . |\alpha_n|$$

On note alors : $u_n = o(\alpha_n)$ *(lire "petit O" de α_n).*
On dit aussi que (α_n) est *prépondérante devant* (u_n).

NB : si (α_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang, $u_n = o(\alpha_n)$ signifie que $\left(\frac{1}{\alpha_n} \cdot u_n\right)$ converge vers 0.

Exemple : $u_n = o(1)$ signifie que (u_n) converge vers 0.

c) Équivalence

(u_n) et (v_n) de $E^{\mathbb{N}}$ sont *équivalentes* si et seulement si : $u_n - v_n = o(\|v_n\|)$.
On note alors : $u_n \sim v_n$ *(lire "u_n équivalent à v_n").*
La relation ainsi définie sur $E^{\mathbb{N}}$ est une relation d'équivalence !

NB : lorsque (u_n) et (v_n) sont à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et si (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang, $u_n \sim v_n$ signifie que $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers 1.

Exemple : pour $\ell \neq 0$, $u_n \sim \ell$ signifie que (u_n) converge vers ℓ.

Attention ! $u_n \sim 0$ signifie que u_n est nul à partir d'un certain rang...

Propriétés : soient (u_n) et (v_n) à valeurs réelles.

a) Si $u_n \sim v_n$, u_n, v_n dans $\mathbb{R}^{+*}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$ (α exposant **constant**)

b) Si $u_n \sim v_n$, u_n, v_n dans $\mathbb{R}^{+*}$, admettant une limite dans $[0, +\infty]$ **différente de 1**, alors $\ln u_n \sim \ln v_n$.

c) $e^{u_n} \sim e^{v_n}$ si et seulement si $(u_n - v_n)$ converge vers 0.

Attention ! "$(u_n - v_n)$ converge vers 0" n'est pas équivalent à "$u_n \sim v_n$" !

II - Topologie d'un espace vectoriel normé

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, x un point de E et A une partie de E.

1) Voisinages, ouverts et fermés

- A est *un voisinage de x* si et seulement si : $\exists r > 0 \quad B(x, r) \subset A$;
- A est *un ouvert de E* si et seulement si A est voisinage de chacun de ses points ;
- A est *un fermé de E* si et seulement si son complémentaire est un ouvert.

Exemples : les boules ouvertes sont des ouverts, les boules fermées sont des fermés.
Dans $\mathbb{R}$, les demi-droites fermées sont des fermés...

Premières propriétés :

1) Toute réunion d'ouverts est un ouvert, toute intersection **finie** d'ouverts est un ouvert.

2) Toute intersection de fermés est un fermé, toute réunion **finie** de fermés est un fermé.

Attention ! $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left]0, 1 + \frac{1}{n}\right[=]0, 1]$, $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] = [0, 1[$ ne sont ni ouverts, ni fermés.

$\emptyset$ et E sont à la fois ouverts et fermés (on montrera que ce sont les seules parties ouvertes et fermées de E).

2) Intérieur, adhérence, frontière, parties denses

- x est *intérieur à* A si et seulement si : $\exists r > 0 \quad B(x,r) \subset A$ (*i.e.* A est un voisinage de x)
- *l'intérieur de* A, noté $\mathring{A}$, est la réunion des ouverts inclus dans A ; c'est le plus grand ouvert de E inclus dans A ; c'est aussi l'ensemble des points de E intérieurs à A
- x est *adhérent à* A si et seulement si : $\forall r > 0 \quad B(x,r) \cap A \neq \emptyset$; en particulier tout point de A est adhérent à A, même si cette notion n'est “intéressante” que pour un point n'appartenant pas à A
- *l'adhérence de* A, notée $\bar{A}$, est l'intersection des fermés contenant A ; c'est le plus petit fermé de E contenant A ; c'est aussi l'ensemble des points de E adhérents à A
- x est *un point frontière de* A si et seulement s'il est adhérent à A **et** adhérent à $E\backslash A$ (autrement dit adhérent à A mais non intérieur à A)
- *la frontière de* A est l'ensemble $\operatorname{Fr} A = \bar{A}\backslash\mathring{A}$ des points frontières de A.

Exemples : les boules $B(x,r)$ et $B_f(x,r)$ ont pour frontière la sphère $S(x,r)$;
dans $\mathbb{R}$, la frontière de $\mathbb{Q}$ est $\mathbb{R}$ tout entier ! Toujours dans $\mathbb{R}$, sous réserve d'existence, la borne inférieure ou supérieure d'une partie est un point adhérent à cette partie.

Attention ! Dans ce contexte, $\bar{A}$ n'est pas le complémentaire de A et $\overline{\mathbb{R}}$ n'est pas $[-\infty, +\infty]$!

Propriétés : pour toute partie A de E, on a $\mathring{A} \subset A \subset \bar{A}$, $E\backslash\mathring{A} = \overline{E\backslash A}$, $E\backslash\bar{A} = \overbrace{E\backslash A}^{\circ}$;
A est ouvert si et seulement si $A = \mathring{A}$; A est fermé si et seulement si $A = \bar{A}$.

<u>*Caractérisation séquentielle des points adhérents, des parties fermées*</u>

- Un point x de E est adhérent à A si et seul[t] s'il existe une suite de points de A convergeant vers x.
- A est un fermé de E si et seul[t] si toute suite **convergente** d'éléments de A a sa limite dans A.

<u>*Parties denses*</u> : une partie D de A est dite *dense dans* A si et seulement si tout point de A est adhérent à D, *i.e.* tout point de A est limite d'une suite de points de D, ou encore $A \subset \bar{D}$.

<u>*Exemples*</u> : $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$; $GL_p(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

III - Étude locale d'une application – Continuité

Dans tout le paragraphe, E et F sont deux espaces vectoriels normés, les deux normes étant notées $\|\cdot\|$.

Attention ! En dimension infinie, les notions suivantes dépendent *a priori* du choix desdites normes.

1) Notion de limite

Définition : soient A une partie non vide de E, a un point de E adhérent à A, $f : A \to F$ et $b \in F$.
f admet b pour limite au point a si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in A \quad \|x - a\| \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - b\| \leq \varepsilon.$$

Lorsqu'un tel b existe il est unique ; on dit alors que b est *la limite de f en a* et l'on note :

$$b = \lim_a f \quad \text{ou} \quad b = \lim_{x \to a} f(x)$$

<u>*Extensions*</u> :

- lorsque $E = \mathbb{R}$ et A non majorée, on dit que $a = +\infty$ est *adhérent à A* et alors $f : A \to F$ *admet $b \in F$ pour limite en $+\infty$* ssi
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K > 0 \quad \forall x \in A \quad x \geq K \Rightarrow \|f(x) - b\| \leq \varepsilon$$
- lorsque $E = \mathbb{R}$ et A non minorée, on dit que $a = -\infty$ est *adhérent à A* et alors $f : A \to F$ *admet $b \in F$ pour limite en $-\infty$* ssi
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K > 0 \quad \forall x \in A \quad x \leq -K \Rightarrow \|f(x) - b\| \leq \varepsilon$$
- lorsque $F = \mathbb{R}$, on dit que $f : A \to \mathbb{R}$ *admet $b = +\infty$ pour limite en a* (adhérent à A dans E) ssi
$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in A \quad \|x - a\| \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq M$$
- lorsque $F = \mathbb{R}$, on dit que $f : A \to \mathbb{R}$ *admet $b = -\infty$ pour limite en a* (adhérent à A dans E) ssi
$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in A \quad \|x - a\| \leq \delta \Rightarrow f(x) \leq -M$$

Interprétation en termes de voisinages

Dans $\mathbb{R}$, on appelle *voisinage de* $+\infty$ (*resp.* $-\infty$) toute partie contenant une demi-droite ouverte de la forme $]a,+\infty[$ (*resp.* $]-\infty,a[$). Alors, en notant $\mathcal{V}_E(a)$ l'ensemble des voisinages dans E de a, toutes les définitions ci-dessus peuvent s'écrire de façon unifiée : f admet b pour limite en a si et seulement si

$$\forall W\in\mathcal{V}_F(b)\quad \exists V\in\mathcal{V}_E(a)\quad f(A\cap V)\subset W.$$

2) Caractérisation séquentielle de l'existence d'une limite finie

Théorème : soit a adhérent à une partie A de E et $f:A\to F$; f admet une limite finie en a si et seulement si l'image par f de toute suite d'éléments de A convergeant vers a est une suite convergente dans F.
De plus, si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ et $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=a$, avec $(u_n)\in A^{\mathbb{N}}$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} f(u_n)=b$.

NB : ce résultat se généralise au cas où $a=\pm\infty$ (dans $\mathbb{R}$) ainsi qu'au cas où les suites images ont pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ (lorsque $F=\mathbb{R}$).

3) Opérations sur les limites

- *Linéarité de la limite* : banal.
- *Composition de limites* : soient G un troisième espace vectoriel normé et $f:A\to F$, $g:B\to G$ où B est une partie de F telle que $f(A)\subset B$; si a est adhérent à A et si f admet une limite finie b en a, alors b est adhérent à B ; si, en outre, $\lim\limits_{b} g=c$, alors $\lim\limits_{a} g\circ f=c$.
- *Limite d'une fonction à valeurs dans un espace produit* : on reprend les notations du § **I.6.c)** et l'on munit $E=\prod\limits_{k=1}^{p}E_k$ de la norme N_∞. Soit D un autre espace vectoriel normé, A une partie de D, a adhérent à A et $f:A\to E$. f est caractérisée par les *applications composantes* $f_k=p_k\circ f$, où p_k est la *projection canonique* $p_k:(x_1,\ldots,x_p)\mapsto x_k$.
  f admet une limite en a dans E si et seulement si, pour tout $k\in[\![1,p]\!]$, f_k admet une limite en a dans E_k. Si c'est le cas, $\lim\limits_{a} f=\left(\lim\limits_{a} f_1,\ldots,\lim\limits_{a} f_p\right)$.

4) Applications continues

Définition : soit $f:A\to F$; si $a\in A$, f est *continue en* a si et seulement si f admet une limite finie en a (cette limite étant nécessairement égale à $f(a)$).
f est *continue (sur A)* si et seulement si f est continue en tout point de A.
Soit $B\subset A$; f est *continue sur* B si et seulement si $f|_B$ est continue sur B.

Prolongement par continuité : si $f:A\to F$, $a\in E\backslash A$, a adhérent à A et si f admet une limite finie b en a, alors f admet un unique prolongement $\widetilde{f}$ à $A\cup\{a\}$ continu en a, défini par :

$$\widetilde{f}(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x\in A\\ b & \text{si } x=a\end{cases}.$$

Caractérisation séquentielle de la continuité :

f est continue en a si et seulement si, pour toute suite (u_n) d'éléments de A convergeant vers a, la suite image $(f(u_n))$ converge dans F (c'est alors nécessairement vers $f(a)$).

Exemples :

1) toute fonction lipschitzienne est continue (si f est k-lipschitzienne, choisir $\delta=\varepsilon/k$) ;

2) toute norme $N:E\to\mathbb{R}$ est continue (car 1-lipschitzienne de (E,N) dans $(\mathbb{R},|\cdot|)$).

Opérations sur les fonctions continues :

- L'ensemble $\mathcal{C}(A,F)$ des fonctions continues de A dans F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- L'ensemble $\mathcal{C}(A,\mathbb{K})$ des fonctions continues de A dans $\mathbb{K}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.
- *Composition* : si $f:A\to F$ et $g:B\to G$ sont continues et si $f(A)\subset B$, alors $g\circ f$ est continue.
- *Restriction* : si $f:A\to F$ est continue sur A et $B\subset A$, alors f est continue sur B.

Attention ! La fonction partie entière de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est continue sur $[0,1[$ mais n'est pas continue en 0.

<u>Raisonnement par densité</u> : soient deux applications continues f et g de A dans F et B une partie de A, dense dans A. Si f et g coïncident sur B, alors elles sont égales sur A.

<u>Exemple</u> : si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et u, v dans $\mathcal{L}(E)$, alors $\chi_{u \circ v} = \chi_{v \circ u}$.

Théorème : *images réciproques d'ouverts et de fermés par une fonction continue*
Soit $f : E \to F$ continue sur E *(E est l'espace de départ **tout entier**)* ;

* si Ω est un ouvert de F, alors $f^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de E ;
* si Φ est un fermé de F, alors $f^{-1}(\Phi)$ est un fermé de E.

<u>Cas particuliers</u> : pour $f : E \to \mathbb{R}$, continue sur E et $\alpha \in \mathbb{R}$,

- $\{x \in E \ / \ f(x) > \alpha\}$, $\{x \in E \ / \ f(x) < \alpha\}$ et $\{x \in E \ / \ f(x) \neq \alpha\}$ sont des ouverts de E.
- $\{x \in E \ / \ f(x) \geq \alpha\}$, $\{x \in E \ / \ f(x) \leq \alpha\}$ et $\{x \in E \ / \ f(x) = \alpha\}$ sont des fermés de E.

<u>Exemple</u> : $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est continue, donc $GL_n(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\mathbb{K} \backslash \{0\})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

5) Continuité des applications linéaires

Soient (E, N) et (F, N') deux espaces vectoriels normés.

Théorème : $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est continue sur E si et seulement s'il existe k dans $\mathbb{R}^+$ tel que
$$\forall x \in E \quad N'\big(u(x)\big) \leq k.N(x).$$
Si c'est le cas, u est k-lipschitzienne.

<u>*Dém.*</u> La condition suffisante est immédiate : si je suppose l'existence de k, la linéarité de u montre aussitôt que u est k-lipschitzienne, donc continue.

Pour la réciproque, je suppose u continue en 0 (ce sera suffisant !). Avec $\varepsilon = 1$, la définition de la continuité en 0 me fournit $\delta > 0$ tel que (puisque $u(0) = 0$)
$$\forall x \in E \quad N(x) \leq \delta \Rightarrow N'\big(u(x)\big) \leq 1.$$
Soit alors x non nul dans E. J'ai $N\left(\dfrac{\delta}{N(x)} \cdot x\right) = \delta$, donc par construction
$$N'\left(u\left(\frac{\delta}{N(x)} \cdot x\right)\right) \leq 1 \quad \text{d'où} \quad N'\big(u(x)\big) \leq \frac{1}{\delta} N(x)$$
et donc $k = \dfrac{1}{\delta}$ convient (l'inégalité étant encore vraie pour $x = 0$!

Exemple : soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{K})$, muni de la norme N_1 ; $u : f \mapsto \displaystyle\int_0^1 f$ est continue de E dans $\mathbb{K}$, tandis que $v : f \mapsto f(1)$ ne l'est pas...

NB : nous verrons que **toutes les applications linéaires sont continues en dimension finie**.

IV - Compacité *(complément hors programme)*

1) Définition

Une partie A d'un espace vectoriel normé E est *compacte* si et seulement si toute suite d'éléments de A admet une sous-suite convergeant <u>vers un élément de A</u>. On dit aussi que A est *un compact* de E.

2) Premières propriétés

Tout compact d'un espace vectoriel normé est fermé et borné.

Réciproque fausse ! La boule $B_f(0,1)$ dans $\mathbb{K}[X]$ muni de la norme N_1 est fermée bornée mais non compacte : la suite (X^n) n'admet aucune sous-suite convergente !

<u>Exemples fondamentaux</u> :

- **les** compacts de $\mathbb{K}$ sont **les** fermés bornés (c'est le théorème de Bolzano-Weierstrass de MPSI !) ;
- les segments sont **des** compacts de $\mathbb{R}$, mais il y a dans $\mathbb{R}$ des compacts qui ne sont pas des intervalles.

3) Image directe d'un compact par une fonction continue

Théorème : si $f : A \to F$ est continue sur A et K compact de E inclus dans A, alors $f(K)$ est un compact de F.

Corollaire : si f est à valeurs réelles et continue sur un compact non vide K, alors f est bornée sur K et atteint ses bornes, notées $\min\limits_K f$, $\max\limits_K f$, les *extremums globaux* de f sur K (en effet, la borne supérieure (*resp.* inférieure) d'une partie de $\mathbb{R}$ est adhérente à cette partie, dès qu'elle existe).

Cas particulier : toute application continue sur un compact non vide est bornée et les bornes supérieure et inférieure de sa norme sont atteintes.

V - Espaces vectoriels normés de dimension finie

1) Compléments hors programme

a) Équivalence des normes en dimension finie – conséquences

Théorème de Bolzano-Weierstrass : toute suite bornée de $\mathbb{K}^p$ possède une sous-suite convergente pour la norme N_∞.

Corollaire : les parties compactes de $\mathbb{K}^p$ muni de la norme N_∞ sont les parties fermées bornées.

Corollaire : dans $\mathbb{K}^p$, toutes les normes sont équivalentes.

Théorème fondamental

Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

b) Compacité

Théorème de Bolzano-Weierstrass : toute suite bornée d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie possède une sous-suite convergente (pour n'importe quelle norme !).

Théorème : dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, les parties compactes sont les fermés bornés.

2) Les résultats au programme dans la filière PSI

a) Notions indépendantes du choix de la norme

Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, les notions de point intérieur, d'intérieur d'une partie, de point adhérent, d'adhérence d'une partie, de parties bornées, ouvertes, fermées, de fonctions lipschitziennes, de limite et de continuité sont indépendantes du choix de la norme.

b) Utilisation des coordonnées

Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F **de dimension finie** d, pour l'étude d'une limite, il est inutile de préciser au sens de quelle norme et l'on peut se ramener à l'étude des coordonnées dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_d)$ de F.

Pour qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de F soit convergente, il faut et il suffit que les d *suites coordonnées* soient convergentes ($k \in [\![1, d]\!]$) ; si c'est le cas, les coordonnées de la limite sont les limites des suites coordonnées.

De même pour une application à valeurs dans F : soient A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E, $f : A \to F$ et $f_1, \ldots, f_q$ les *applications coordonnées* associées à f vérifiant

$$\forall x \in A \quad f(x) = \sum_{k=1}^{q} f_k(x) . e_k.$$

Alors f admet une limite en a (adhérent à A dans E) si et seulement si les f_k, $k \in \mathbb{N}_q$ admettent toutes une limite en a ; si c'est le cas,

$$\lim_a f = \sum_{k=1}^{q} \left(\lim_a f_k\right) . e_k.$$

c) Fonction continue sur une partie fermée bornée non vide

Théorème : si E est un espace vectoriel normé de dimension finie et K une partie non vide, fermée et bornée de E, alors toute fonction continue de K dans $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

Exemple : si K est une partie fermée, bornée, non vide de E et $x \in E$, alors

$$\exists a \in K \quad d(x, K) = \|x - a\| \ ;$$

en effet, $f : y \mapsto \|x - y\|$ est 1-lipschitzienne donc continue sur K : elle atteint sa borne inférieure sur K, qui n'est autre que $d(x, K)$.

d) Continuité des applications linéaires et multilinéaires

Théorème : toute application linéaire d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel **de dimension finie** E dans un espace vectoriel normé F est lipschitzienne, donc continue.

Théorème : plus généralement, si $E_1, \dots, E_p$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, toute application p-linéaire f de l'espace produit $\prod_{k=1}^{p} E_k$ dans un espace vectoriel normé F est continue et il existe M dans $\mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in \prod_{k=1}^{p} E_k \quad \|f(x_1, \dots, x_p)\| \leq M \cdot \prod_{k=1}^{p} \|x_k\| .$$

Exemples (où E est un espace vectoriel normé de dimension finie) :

- $(\lambda, x) \mapsto \lambda.x$ est continue sur $\mathbb{K} \times E$;
- $(x, y) \mapsto (x|y)$ est continue sur $E \times E$, si E est un espace vectoriel euclidien ;
- $(u, v) \mapsto u \circ v$ est continue sur $\mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$;
- $(A, B) \mapsto A \times B$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$;
- une base $\mathcal{B}$ de E étant donnée, le déterminant dans la base $\mathcal{B}$ est continu de E^n dans $\mathbb{K}$.

Exercice : dans un espace vectoriel normé de dimension finie, tout sous-espace vectoriel est un fermé.

e) Continuité des applications polynomiales

Définition : on appelle *monôme sur* $\mathbb{K}^n$ toute application de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$ de la forme

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \quad \text{où} \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n.$$

On appelle *fonction polynomiale de* $\mathbb{K}^n$ *dans* $\mathbb{K}$ toute combinaison linéaire de monômes.
On appelle *fonction polynomiale de* E *dans* F (où E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie) toute fonction dont les applications coordonnées dans une base de F sont des fonctions polynomiales des coordonnées dans une base de E (c'est alors le cas quelles que soient les bases choisies dans E et F, d'après les formules de changement de base).

Théorème : toute fonction polynomiale d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie dans un autre est continue.

Dém. Conséquence immédiate des théorèmes opératoires classiques et de la continuité des formes linéaires coordonnées.

Exemples (où E est un espace vectoriel normé de dimension finie) :

- l'application $M \mapsto \det M$ est continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$
- l'application $M \mapsto \chi_M$ est continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}_n[X]$
- $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et l'application $M \mapsto M^{-1}$ est continue sur $GL_n(\mathbb{K})$
- l'application $u \mapsto \det u$ est continue de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathbb{K}$ (où E est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie)
- l'application $u \mapsto \chi_u$ est continue de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathbb{K}_n[X]$
- $GL(E)$ est un ouvert dense de $\mathcal{L}(E)$ et l'application $u \mapsto u^{-1}$ est continue sur $GL(E)$.

VI - Séries de vecteurs – normes subordonnées *(hors programme)*

1) Convergence d'une série de vecteurs

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé ; on définit comme dans $\mathbb{K}$ la notion de convergence d'une série : étant donnée une suite (x_n) de vecteurs de E, on dit que *la série* $\sum x_n$ *converge* si et seulement si la suite (S_p) des sommes partielles converge, où

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad S_p = \sum_{n=0}^{p} x_n.$$

En cas de convergence, la limite de (S_p) est un vecteur de E, appelé *somme de la série* et noté $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$.

2) Convergence absolue

On dit que la série de vecteurs $\sum x_n$ est *absolument convergente dans* $(E, \|\cdot\|)$ si et seulement si la série numérique $\sum \|x_n\|$ converge. En dimension infinie cette notion dépend *a priori* du choix de la norme...

Théorème : dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel **de dimension finie**, la notion de convergence absolue ne dépend pas du choix de la norme.

Dém. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, N_1 et N_2 deux normes sur E et $\sum x_n$ une série de vecteurs de E. Le fait que les deux séries numériques $\sum N_1(x_n)$ et $\sum N_2(x_n)$ soient de même nature découle immédiatement de l'équivalence des normes : puisque E est de dimension finie, je dispose de α et β strictement positifs tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha N_1(x_n) \leq N_2(x_n) \leq \beta N_1(x_n)$$

d'où le résultat puisque $N_1(x_n) = O\big(N_2(x_n)\big)$ et $N_2(x_n) = O\big(N_1(x_n)\big)$.
Par conséquent, la notion de convergence absolue est bien indépendante du choix de la norme.

NB : comme on pouvait s'y attendre, ce résultat est faux en dimension infinie ; voir par exemple dans $\mathbb{K}[X]$ la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{X^n}{n}$ avec les deux normes $N_1 : P \mapsto \int_0^1 |P|$ et $N_2 : P \mapsto \max_{[0,1]} |P|$.

Théorème : dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel **de dimension finie** E, toute série absolument convergente converge.

Dém. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\sum x_n$ une série absolument convergente de vecteurs de E. En vertu du théorème précédent, je peux choisir une norme "pratique" ; soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_d)$ une base de E et N_∞ la norme classique définie par :

$$\forall v = \sum_{k=1}^{d} v_k . e_k \quad N_\infty(v) = \max_{1\leq k\leq d} |v_k|.$$

L'hypothèse de la convergence de la série $\sum N_\infty(x_n)$ assure alors la convergence absolue des "séries coordonnées" des vecteurs x_n dans la base $\mathcal{B}$. Donc toutes ces séries coordonnées convergent dans $\mathbb{K}$, ce qui assure la convergence dans E de la suite des sommes partielles (les coordonnées des sommes partielles de la série de vecteurs sont les sommes partielles des séries coordonnées !). Par conséquent la série de vecteurs $\sum x_n$ converge.

3) Exemples dans $\mathcal{L}(E)$ en dimension finie

a) Normes subordonnées dans $\mathcal{L}(E)$

Pour E $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N, on définit sur $\mathcal{L}(E)$ une norme, dite *norme subordonnée à* N, en posant :

$$\forall u \in \mathcal{L}(E) \quad \|u\| = \max_{x\in B} N\big(u(x)\big) \quad \text{(où } B \text{ est la boule unité fermée de } E\text{).}$$

On a alors : $\forall u \in \mathcal{L}(E) \quad \forall x \in E \quad N\big(u(x)\big) \leq \|u\|\, N(x)$

et : $\forall (u, v) \in \mathcal{L}(E)^2 \quad \|v \circ u\| \leq \|u\| \cdot \|v\|$

d'où par récurrence immédiate : $\forall u \in \mathcal{L}(E) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \|u^n\| \leq \|u\|^n$.

On dispose alors des exemples classiques suivants et des exemples correspondants dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, en utilisant une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $N(A) = \|\mathrm{Can}\, A\|$ où $\|\cdot\|$ est une norme subordonnée sur $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$.

b) Séries géométriques

Si $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $\|u\| < 1$, alors la série $\sum u^n$ est absolument convergente, $\mathrm{Id}_E - u$ est inversible et

$$(\mathrm{Id}_E - u)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n.$$

<u>*Dém.*</u> $\|u^n\| \leq \|u\|^n$ fournit la convergence absolue, donc la suite (S_p) des sommes partielles converge vers un élément S de $\mathcal{L}(E)$; or, vu l'hécatombe,

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad (\mathrm{Id}_E - u) \circ S_p = (\mathrm{Id}_E - u) \circ \sum_{n=0}^{p} u^n = \mathrm{Id}_E - u^{p+1} \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} \mathrm{Id}_E.$$

Par ailleurs, comme l'application $v \mapsto (\mathrm{Id}_E - u) \circ v$ est continue (car linéaire en dimension finie), j'ai $(\mathrm{Id}_E - u) \circ S_p \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} (\mathrm{Id}_E - u) \circ S$ d'où, par unicité de la limite, $(\mathrm{Id}_E - u) \circ S = \mathrm{Id}_E$.
La dimension finie permet de conclure.

c) Série exponentielle

Pour tout u de $\mathcal{L}(E)$, la série d'endomorphismes $\sum \frac{1}{n!} \cdot u^n$ est absolument convergente ; sa somme est un endomorphisme de E, appelé *l'exponentielle de u*, noté

$$\exp u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot u^n \quad \text{et} \quad \|\exp u\| \leq e^{\|u\|}.$$

<u>*Dém.*</u> $\left\| \frac{1}{n!} \cdot u^n \right\| \leq \frac{\|u\|^n}{n!}$ fournit la convergence absolue et un passage à la limite dans l'inégalité triangulaire donne $\|\exp u\| \leq e^{\|u\|}$.

NB : en généralisant à $\mathcal{L}(E)$ le produit de Cauchy dans $\mathbb{C}$, on montre que, si u et v commutent dans $\mathcal{L}(E)$, alors

$$\exp(u+v) = \exp u \circ \exp v.$$

On définit de même l'exponentielle d'une matrice carrée.

Exemple : dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$, pour une matrice A diagonalisable, le calcul de $\exp A$ est aisé. Si

$$P^{-1}AP = \Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$$

il vient

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \sum_{n=0}^{p} \frac{1}{n!} A^n = P \,\mathrm{diag}\left(\sum_{n=0}^{p} \frac{\lambda_1^n}{n!}, \ldots, \sum_{n=0}^{p} \frac{\lambda_d^n}{n!} \right) P^{-1}$$

puis, par continuité de l'application linéaire $M \mapsto PMP^{-1}$,

$$\exp A = P \,\mathrm{diag}\left(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_d} \right) P^{-1}$$

où l'on (re)démontre au passage la convergence de la série !