3. Compléments sur les séries numériques

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et “positif” est à prendre au sens large.

I - Séries alternées

1) Définition

On appelle *série alternée* toute série de la forme $\sum (-1)^n a_n$ où les a_n sont des réels de même signe.

2) Condition suffisante de convergence *(théorème spécial des séries alternées)*

Soit $\sum u_n$ une série alternée dont la valeur absolue du terme général décroît et tend vers 0.

Alors $\sum u_n$ converge. De plus, pour tout p dans $\mathbb{N}$, le reste $R_p = \sum_{n=p+1}^{\infty} u_n$ est du signe du “premier terme négligé” u_{p+1} et majoré en valeur absolue par ce même terme :

$$|R_p| \leq |u_{p+1}|$$

Dém. (*idée* : les suites (S_{2q}) et (S_{2q+1}) sont adjacentes).
Quitte à remplacer u_n par $-u_n$, je peux supposer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (-1)^n a_n \quad$ où $\quad a_n = |u_n|$ décroît et tend vers 0. En notant (S_p) la suite des sommes partielles, j'ai

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad S_{p+2} = S_p + (-1)^{p+1} a_{p+1} + (-1)^{p+2} a_{p+2} = S_p + (-1)^{p+1} (a_{p+1} - a_{p+2}) \quad \text{et} \quad a_{p+1} - a_{p+2} \geq 0$$

donc la suite (S_{2q}) est décroissante tandis que (S_{2q+1}) est croissante. De plus :

$$S_{2q+1} - S_{2q} = -a_{2q+1} \underset{q\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

par conséquent les suites (S_{2q}) et (S_{2q+1}) sont adjacentes : elles convergent vers une même limite S et donc (S_p) converge également vers S, d'où la convergence de la série $\sum u_n$, avec en outre :

$$\forall q \in \mathbb{N} \quad S_{2q+1} \leq S \leq S_{2q} \quad \text{d'où} \quad S_{2q+1} - S_{2q} \leq S - S_{2q} \leq 0$$

soit : $-a_{2q+1} \leq R_{2q} \leq 0 \quad$ d'où $\quad |R_{2q}| \leq a_{2q+1} = |u_{2q+1}|$.
De même : $\forall q \in \mathbb{N} \quad S_{2q+1} \leq S \leq S_{2q+2} \quad$ d'où $\quad 0 \leq S - S_{2q+1} \leq S_{2q+2} - S_{2q+1}$
soit : $0 \leq R_{2q+1} \leq a_{2q+2} \quad$ d'où $\quad |R_{2q+1}| \leq a_{2q+2} = |u_{2q+2}|$
et finalement :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad |R_p| \leq |u_{p+1}|\,.$$

NB : si $\sum_{n\geq n_0} u_n$ est une série alternée vérifiant les hypothèses du TSSA,
alors la somme S est du signe du premier terme u_{n_0}. En effet,

$$S = u_{n_0} + R_{n_0} \quad \text{avec} \quad |R_{n_0}| \leq |u_{n_0+1}| \leq |u_{n_0}|\,.$$

Plus généralement, chaque somme partielle S_p est du même signe que la somme S de la série.

<u>*Exemple*</u> : pour tout $\alpha > 0$, la série alternée $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ converge, car elle vérifie les hypothèses du TSSA. Noter que, pour $\alpha > 1$, cette série est *absolument convergente*, tandis que, pour $0 < \alpha \leq 1$, elle est *semi-convergente* (cf. les séries de Riemann). Remarquer que, pour $\alpha > 1$, la majoration du reste fournie par le TSSA est meilleure que celle obtenue par comparaison à une intégrale de la série des valeurs absolues.

<u>*Les quatre sommes*</u> : pour $\alpha > 1$, compte tenu des résultats sur les séries de Riemann, nous disposons des sommes suivantes (les quatre séries sont absolument convergentes).

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \;;\quad B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} \;;\quad C = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^\alpha} \;;\quad D = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^\alpha}.$$

Il faut savoir que, dès que l'on connaît **une seule** de ces quatre sommes, on en déduit **les trois autres** !

En effet nous avons immédiatement les relations :

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2^\alpha} A \quad \text{(banal !)} \\ A &= C + D \quad \text{et} \quad B = C - D \quad \text{(séparer les termes de rangs pair et impair)} \end{aligned}$$

Il en résulte

$$C = \left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right) A \quad \text{et} \quad B = A - 2D = \left(1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}\right) A,$$

ce qui permet toutes les "transitions".

Ces remarques sont utiles dès que l'on est en mesure de calculer l'une desdites sommes. On en déduit alors les trois autres !

Enfin, il est bon de comprendre que l'expression de B permet de profiter de la majoration du reste fournie par le TSSA : voir au chapitre 5 l'étude du comportement de la fonction ζ de Riemann au voisinage de 1.

II - Séries à termes réels positifs

1) Condition nécessaire et suffisante de convergence

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, telle que $u_n \geq 0$ à partir d'un certain rang n_0.

$\sum u_n$ converge si et seulement si la suite (S_p) des sommes partielles est majorée. Sinon $S_p \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(En effet, $(S_p)_{p \geq n_0}$ est croissante.)

2) Utilisation des relations de comparaison

Propriété 1 : soient (u_n) et (v_n) *à termes réels positifs* à partir d'un certain rang, telles que $u_n = O(v_n)$ (c'est le cas en particulier lorsque $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang)

- si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge ;
- si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Propriété 2 : soient (u_n) et (v_n) telles que $u_n \sim v_n$ et *de signe constant* à partir d'un certain rang. $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

NB : deux suites équivalentes sont de même signe à partir d'un certain rang ; il suffit de connaître le signe de l'une des deux suites équivalentes.

Attention ! Ces propriétés peuvent être en défaut lorsque u_n et v_n ne sont pas de signe constant.

<u>*Exemple*</u> : soit $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n}$; $\displaystyle\sum_{n \geq 1} u_n$ est une série alternée, $u_n \sim v_n$ où $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$;

$\sum v_n$ vérifie les hypothèses du TSSA et donc converge et pourtant... $\sum u_n$ diverge ! En effet :

$$u_n = v_n + w_n \quad \text{où} \quad w_n = u_n - v_n = \frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n} - (-1)^n\right)} \sim \frac{1}{n}$$

donc $\sum w_n$ diverge (appliquer la propriété 2 à $w_n \sim \dfrac{1}{n}$, de signe constant) ; ainsi $\sum u_n$ diverge.

Comparaison à une série de Riemann

Lorsqu'un équivalent "simple" de u_n n'apparaît pas, mais que u_n tend "suffisamment vite" vers 0, penser à étudier $n^\alpha u_n$ avec α convenablement choisi...

En effet, s'il existe $\alpha > 1$ tel que la suite $(n^\alpha u_n)$ soit bornée (en particulier si elle converge vers 0), alors $\sum u_n$ est absolument convergente (en effet $|u_n| = O\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$).

Par exemple, pour tout $s > 0$, $\sum e^{-n^s}$ converge.

Formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

Dém. (non exigible) Soit $u_n = \dfrac{1}{n!}\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$; pour montrer que la suite (u_n) converge, je montre que la suite $(\ln u_n)$ converge, en montrant que la *série* $\sum v_n$ converge, où :

$$v_n = \ln u_{n+1} - \ln u_n = \ln\left(\frac{(n+1)^{n+1/2}}{n^{n+1/2}}\cdot\frac{1}{e}\right) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1 = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \ ;$$

ainsi la suite $(\ln u_n)$ converge vers un réel ℓ ; donc, par continuité de la fonction exponentielle, (u_n) converge vers $L = e^\ell > 0$; par conséquent :

$$n! \sim \frac{1}{L}\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

On peut montrer que $L = 1/\sqrt{2\pi}$, par exemple à l'aide des intégrales de Wallis. Posons pour $n \in \mathbb{N}$

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t dt.$$

Une intégration par parties suivie d'une récurrence donne :

$$\forall n \geq 2 \quad W_n = \frac{n-1}{n}W_{n-2} \quad \text{d'où} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad W_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\,\frac{\pi}{2}.$$

Par ailleurs, la suite (W_n) est décroissante ; comme $W_n \sim W_{n-2}$, il en résulte que $W_n \sim W_{n-1}$.
Enfin, la suite (nW_nW_{n-1}) est constante, d'où

$$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

On en déduit la valeur de L.

3) Règle de d'Alembert

Propriété : soit (u_n) à termes > 0 à partir d'un certain rang, telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$

- si $\ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge ;
- si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge ;
- si $\ell = 1$: *cas douteux* de la règle de d'Alembert (cf. les séries de Riemann).

Dém. Si $\ell < 1$, je fixe r tel que $\ell < r < 1$; alors, à partir d'un certain rang, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq r$ d'où n_0 tel que la suite $\left(\dfrac{u_n}{r^n}\right)_{n\geq n_0}$ soit décroissante et donc (récurrence immédiate) : $\forall n \geq n_0 \quad 0 < u_n \leq \frac{u_{n_0}}{r^{n_0}}\cdot r^n$.
Ainsi $u_n = O(r^n)$.
J'en déduis la convergence de $\sum u_n$ par comparaison à la série géométrique convergente $\sum r^n$.
Même méthode pour $\ell > 1$.

NB : cette méthode est un cas particulier de *comparaison logarithmique* ; la version générale (hors programme, mais classique !) est la suivante :
si (u_n) et (v_n) sont deux suites à termes > 0 à partir d'un certain rang, telles que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$, toujours à partir d'un certain rang, alors $u_n = O(v_n)$.

Série exponentielle :

Pour tout complexe z, la série $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ est absolument convergente, sa somme est : $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Dém. Pour $z \neq 0$, en posant $u_n = \dfrac{z^n}{n!}$, j'ai

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|z|}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 < 1.$$

La règle de d'Alembert s'applique à $\sum |u_n|$ et prouve la convergence absolue.

4) Comparaison à une intégrale

Théorème : soient $n_0 \in \mathbb{N}^*$ et f une application continue par morceaux sur $[n_0, +\infty[$, à valeurs réelles, positive et décroissante.

La série de terme général $w_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)$ est convergente, à termes positifs.

La série $\displaystyle\sum_{n \geq n_0} f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[n_0, +\infty[$ (*i.e.* si et seulement si $\displaystyle\int_{n_0}^{X} f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite réelle lorsque X tend vers $+\infty$, cf. chapitre 7).

<u>*Application (hors programme mais classique !)*</u> : en cas de divergence, on a deux infiniments grands équivalents

$$\sum_{n=n_0}^{p} f(n) \underset{p\to\infty}{\sim} \int_{n_0}^{p} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

NB : 1) La relation $w_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} [f(t) - f(n)]\,\mathrm{d}t$ permet d'encadrer w_n (un encadrement analogue peut être obtenu lorsque f est croissante).

2) Avec les notations précédentes, si en outre f est de classe $\mathcal{C}^1$, j'obtiens en intégrant par parties

$$w_n = \int_{n-1}^{n} [f(t) - f(n)]\,\mathrm{d}t = \big[(t-n+1)\big(f(t) - f(n)\big)\big]_{t=n-1}^{t=n} - \int_{n-1}^{n} (t-n+1)\,f'(t)\,\mathrm{d}t,$$

soit

$$w_n = -\int_{n-1}^{n} (t-n+1)\,f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

<u>*Dém.*</u> (du théorème) Soit $n > n_0$; comme f est décroissante, j'ai

$$\forall t \in [n-1, n] \quad f(n) \leq f(t) \leq f(n-1)$$

d'où, en intégrant sur $[n-1, n]$:

$$f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(n-1)$$

et en retranchant $f(n)$, j'obtiens :

$$0 \leq w_n \leq f(n-1) - f(n)$$

puis, pour $p > n_0$, en sommant,

$$0 \leq \sum_{n=n_0+1}^{p} w_n \leq f(n_0) - f(p) \leq f(n_0).$$

Ainsi, la série $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} w_n$ est bien à termes dans $\mathbb{R}^+$ et ses sommes partielles sont majorées, donc elle converge. Or, grâce à la relation de Chasles,

$$\sum_{n=n_0+1}^{p} w_n = \int_{n_0}^{p} f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{n=n_0+1}^{p} f(n)$$

d'où, en reprenant l'encadrement précédent :

$$\sum_{n=n_0+1}^{p} f(n) \leq \int_{n_0}^{p} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=n_0}^{p} f(n).$$

Comme la suite $p \mapsto \displaystyle\sum_{n=n_0+1}^{p} f(n)$ et la fonction $X \mapsto \displaystyle\int_{n_0}^{X} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont croissantes, le résultat annoncé en découle.

Enfin, dans le cas où $\displaystyle\sum_{n=n_0+1}^{p} f(n)$ et $\displaystyle\int_{n_0}^{p} f(t)\,\mathrm{d}t$ ont pour limite $+\infty$, ce sont deux infiniment grands équivalents, puisque leur différence est bornée.

Exemples :

1) *Séries de Riemann (rappel)* : pour $\alpha > 0$, le théorème précédent s'applique à $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ sur $[1, +\infty[$

2) *Séries de Bertrand (classique mais hors programme !)* : nature de $\sum u_n$ où $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$?

3) *Constante d'Euler* : avec $f : t \mapsto \dfrac{1}{t}$, je retrouve

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \gamma \text{ ; en particulier } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$$

et ici, pour $n \geq 2$,

$$w_n = \int_{n-1}^{n} \frac{t-n+1}{t^2} \mathrm{d}t \leq \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \quad \text{d'où} \quad \sum_{n=p+1}^{\infty} w_n \leq \frac{1}{p}.$$

(on a $\gamma \approx 0,577$; on ne sait toujours pas si γ est un nombre rationnel ou pas...)

4) *Formule de Stirling* (deuxième version) : avec $f : t \mapsto -\ln t$, j'obtiens avec une deuxième intégration par parties

$$\begin{aligned} w_n &= \int_{n-1}^{n} (-\ln t)\,\mathrm{d}t + \ln n = \int_{n-1}^{n} \frac{t-n+1}{t} \mathrm{d}t = \int_{n-1}^{n} \frac{1}{2t} \mathrm{d}t + \int_{n-1}^{n} \frac{t-n+1/2}{t} \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2} \left[\ln n - \ln(n-1)\right] + \left[\frac{t^2 - (2n-1)\,t + n\,(n-1)}{2t}\right]_{t=n-1}^{t=n} + \int_{n-1}^{n} \frac{(t-n+1)\,(t-n)}{2t^2} \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2} \left[\ln n - \ln(n-1)\right] - \delta_n \end{aligned}$$

où $\delta_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{(n-t)\,(1-(n-t))}{2t^2} \mathrm{d}t$ vérifie

$$0 \leq \delta_n \leq \frac{1}{8} \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \quad (\text{cf.} \quad \forall x \in [0,1] \quad x\,(1-x) \leq \frac{1}{4}) \text{ ;}$$

il en résulte que la série $\sum \delta_n$ converge, or pour $p \geq 2$

$$\sum_{n=2}^{p} w_n = \ln p! - \int_{1}^{p} \ln t \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \ln p - \sum_{n=2}^{p} \delta_n$$

donc la suite de terme général

$$\ln p! - \int_{1}^{p} \ln t \mathrm{d}t - \frac{1}{2} \ln p = \ln p! - \left(p + \frac{1}{2}\right) \ln p + p - 1$$

converge. Je retrouve ainsi l'existence de ℓ dans $\mathbb{R}^{+*}$ tel que

$$p! \sim \ell \cdot p^{p+1/2} e^{-p}.$$

III - Produit de Cauchy de deux séries de nombres complexes

1) Définition

Étant données deux séries $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ à termes complexes, on appelle *produit de Cauchy* de ces deux séries, la série $\sum\limits_{n\geq 0} w_n$ où

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q = \sum_{q=0}^{n} u_{n-q} v_q = \sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p} \;.$$

2) Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes

Théorème : si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont **absolument** convergentes,
alors $\sum w_n$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right)$$

Attention ! Tout doit être indexé **à partir de 0.**

<u>*Exemple*</u> : si $|z| < 1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, z^n = \frac{1}{(1-z)^2}$ (avec $u_n = v_n = z^n \dots$).

Attention ! Ce résultat peut être en défaut en cas de semi-convergence :

$$\text{avec } u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}, \text{ j'ai } w_n = (-1)^n \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{p+1}\sqrt{n-p+1}}$$

or

$$\forall p \in \{0, \dots, n\} \quad (p+1)\big(n+2-(p+1)\big) \le \frac{(n+2)^2}{4}$$

d'où

$$\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{p+1}\sqrt{n-p+1}} \ge (n+1)\,\frac{2}{n+2}$$

et donc $\sum w_n$ diverge grossièrement.

<u>*Dém. du théorème*</u> Je pose

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \text{ , } V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k \text{ , } W_n = \sum_{k=0}^{n} w_k \text{ , } C_n = [\![0, n]\!]^2 \text{ , } T_n = \left\{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \;/\; p+q \le n\right\}$$

et j'ai

$$W_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{p+q=k} u_p v_q\right) = \sum_{(p,q)\in T_n} u_p v_q \text{ ; } U_n V_n = \sum_{(p,q)\in C_n} u_p v_q \text{ .}$$

<u>*Premier cas*</u> : $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont à termes dans $\mathbb{R}^+$.

Alors, en posant $m = E(n/2)$, j'ai $C_m \subset T_n \subset C_n$, d'où $U_m V_m \le W_n \le U_n V_n$ et le théorème d'encadrement permet de conclure.

<u>*Cas général*</u> : je pose de même

$$u'_n = |u_n| \text{ , } v'_n = |v_n| \text{ , } w'_n = \sum_{p+q=n} u'_p v'_q \text{ , } U'_n = \sum_{k=0}^{n} u'_k \text{ , } V'_n = \sum_{k=0}^{n} v'_k \text{ , } W'_n = \sum_{k=0}^{n} w'_k \text{ ;}$$

le premier cas montre que $\sum w'_n$ converge et a pour somme $\lim\limits_{n\to\infty} (U'_n V'_n)$, ce qui me donne dans un premier temps la convergence absolue de $\sum w_n$, puisque

$$|w_n| \le \sum_{p+q=n} u'_p v'_q = w'_n \text{ ;}$$

de plus,

$$|U_n V_n - W_n| = \left|\sum_{(p,q)\in C_n\setminus T_n} u_p v_q\right| \le \sum_{(p,q)\in C_n\setminus T_n} u'_p v'_q = U'_n V'_n - W'_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

d'où le résultat.

3) Applications à la série exponentielle

$$\forall \left(z, z'\right) \in \mathbb{C}^2 \quad e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad e^{\overline{z}} = \overline{e^z} \quad \text{et} \quad \forall \theta \in \mathbb{R} \quad \left|e^{i\theta}\right| = 1.$$

NB : la “vraie” définition des fonctions cos et sin utilise ce qui précède ;

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \cos\theta = \operatorname{Re} e^{i\theta} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \operatorname{Im} e^{i\theta}.$$

IV - Compléments hors programme

1) Sommation des relations de comparaison

a) Comparaison des sommes partielles en cas de divergence

Ici $\sum a_n$ est une série **à termes réels positifs divergente**.

- si $\sum u_n$ est une série à termes complexes telle que $u_n = O(a_n)$, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{p} u_n = O\left(\sum_{n=0}^{p} a_n\right)$
- si $\sum u_n$ est une série à termes complexes telle que $u_n = o(a_n)$, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{p} u_n = o\left(\sum_{n=0}^{p} a_n\right)$
- si $\sum b_n$ est une série **à termes réels positifs** telle que $a_n \sim b_n$, alors $\sum b_n$ diverge également et
$$\sum_{n=0}^{p} a_n \sim \sum_{n=0}^{p} b_n.$$

b) Comparaison des restes en cas de convergence

Ici $\sum a_n$ est une série **à termes réels positifs convergente**.

- si $\sum u_n$ est une série à termes complexes telle que $u_n = O(a_n)$, alors $\displaystyle\sum_{n=p+1}^{\infty} u_n = O\left(\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n\right)$
- si $\sum u_n$ est une série à termes complexes telle que $u_n = o(a_n)$, alors $\displaystyle\sum_{n=p+1}^{\infty} u_n = o\left(\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n\right)$
- si $\sum b_n$ est une série **à termes réels positifs** telle que $a_n \sim b_n$, alors $\sum b_n$ converge également et
$$\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=p+1}^{\infty} b_n.$$

c) Exemples d'utilisation (très classiques !)

Théorème de Cesàro (convergence en moyenne)
Soit (u_n) une suite complexe convergeant vers ℓ et (α_n) une suite de réels positifs tels que $\sum \alpha_n$ diverge.

Alors la suite des moyennes pondérées $\left(\dfrac{\sum_{n=0}^{p} \alpha_n u_n}{\sum_{n=0}^{p} \alpha_n}\right)$ converge également vers ℓ.

En particulier (avec $\alpha_n = 1$ pour tout n), $\left(\dfrac{1}{p}\sum_{n=1}^{p} u_n\right)$ converge vers ℓ.

Constante d'Euler
On s'intéresse à la série harmonique (divergente !) $\sum \dfrac{1}{n}$ et l'on écrit (habilement)
$$\frac{1}{n} \sim -\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \ln n - \ln(n-1) \quad \text{(pour } n \geq 2\text{)}.$$
Les sommes partielles sont donc des infiniment grand équivalents :
$$\sum_{n=2}^{p} \frac{1}{n} \sim \ln p \quad \text{d'où} \quad \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} \sim \ln p.$$
On peut préciser la différence :
$$\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} - \ln p = 1 + \sum_{n=2}^{p} a_n \quad \text{où} \quad a_n = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{2n^2}.$$
Par comparaison à une série de Riemann, $\sum a_n$ converge. . .

2) Suites de Cauchy – Transformation d'Abel

a) Suites de Cauchy

Définition : une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *de Cauchy* si et seulement si

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists n_0\in\mathbb{N}\quad\forall n\geq n_0\quad\forall p\in\mathbb{N}\quad |u_{n+p}-u_n|\leq\varepsilon.$$

Il est clair que toute suite convergente est de Cauchy, mais la réciproque est fausse dans certains espaces métriques (par exemple dans $\mathbb{Q}$). Cependant elle est vraie dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{C}$ et plus généralement dans tout espace vectoriel normé de dimension finie.

Pour le prouver, on peut établir successivement les résultats suivants :

- de toute suite réelle on peut extraire une suite monotone
- de toute suite réelle bornée on peut extraire une suite convergente *(théorème de Bolzano-Weierstrass)*
- de toute suite complexe bornée on peut extraire une suite convergente
- toute suite de Cauchy est bornée
- toute suite de Cauchy admettant une sous-suite convergente converge.

b) Transformation d'Abel

Soient (λ_n), (b_n) deux suites de complexes. On pose :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad a_n=\lambda_n b_n\quad\text{et}\quad B_n=\sum_{k=0}^{n}b_k\ .$$

Établir, pour $n\in\mathbb{N}$ et $p\in\mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{p}a_{n+k}=\sum_{k=1}^{p}\left(\lambda_{n+k}-\lambda_{n+k+1}\right)B_{n+k}-\lambda_{n+1}B_n+\lambda_{n+p+1}B_{n+p}\ .$$

NB : le lecteur notera l'analogie avec l'intégration par parties...

En déduire que, si la suite (B_n) est bornée et si (λ_n) est une suite réelle décroissante de limite nulle, alors la série $\sum a_n$ est convergente *(montrer que la suite des sommes partielles est de Cauchy !)*.

<u>*Exemples*</u> :

1) retrouver ainsi le théorème spécial des séries alternées ;

2) montrer la convergence de la série $\sum\dfrac{e^{int}}{n^\alpha}$, où $\alpha\in\mathbb{R}^{+*}$ et $t\in\mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$.