2. Réduction des endomorphismes, des matrices carrées

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I - Sous-espaces stables par un endomorphisme

1) Généralités

Définition : soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace de E.
F est dit *stable par* u (ou u-*stable*) si et seulement si $u(F) \subset F$ (*i.e.* $\forall x \in F \quad u(x) \in F$).
Lorsque F est stable par u, l'application $v : \begin{array}{ccc} F & \rightarrow & F \\ x & \mapsto & u(x) \end{array}$ (linéaire comme u) est *l'endomorphisme induit par* u *sur* F.

Propriété : si u, v, éléments de $\mathcal{L}(E)$, commutent, alors $\operatorname{Im} v$ et $\operatorname{Ker} v$ sont stables par u.

<u>*Caractérisation matricielle en dimension finie*</u> : soient E, $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, F sous-espace de E de dimension p, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ base de E adaptée à F et $u \in \mathcal{L}(E)$. F est stable par u si et seulement si la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est triangulaire par blocs, de la forme $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$, $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ étant alors la matrice dans $(e_1, \ldots, e_p)$ de l'endomorphisme induit par u sur F.

<u>*Dém.*</u> Il suffit de remarquer que $F = \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ est stable par u si et seulement si

$$\forall j \in \{1, \ldots, p\} \quad u(e_j) \in F.$$

<u>*Rappel*</u> : $\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A) . \det(D)$.

2) Sommes directes de sous-espaces stables. Matrices diagonales par blocs

Théorème : soient $E_1, \ldots, E_k$, sous-espaces de E, $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, tels que $E = \bigoplus_{j=1}^{k} E_j$, $\mathcal{B}$ base de E adaptée à cette décomposition et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Posons, pour tout j de $\mathbb{N}_k$, $p_j = \dim E_j$.
Les E_j, $1 \leq j \leq k$, sont stables par u si et seulement si la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est diagonale par blocs, de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix}$$

où $\quad \forall j \in \mathbb{N}_k \quad A_j \in \mathcal{M}_{p_j}(\mathbb{K})$.

<u>*Rappel*</u> : $\det(M) = \prod_{j=1}^{k} \det(A_j)$.

<u>*Cas particulier*</u> : soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. La matrice de u dans $\mathcal{B}$ est diagonale si et seulement si les droites $\mathbb{K}.e_j$, $1 \leq j \leq n$ sont stables par u, c'est-à-dire si et seulement si

$$\forall j \in \mathbb{N}_n \quad \exists \lambda_j \in \mathbb{K} \quad u(e_j) = \lambda_j . e_j \;;$$

dans ce cas, la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

3) Matrices triangulaires supérieures

Théorème : soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B}=(e_1,\ldots,e_n)$ une base de E et $u\in\mathcal{L}(E)$. La matrice de u dans $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure si et seulement si les $E_j=\operatorname{Vect}(e_1,\ldots,e_j)$, $1\leq j\leq n$, sont stables par u.

Exemple : dans $E=\mathbb{K}_n[X]$, muni de la base canonique $\mathcal{B}=(1,X,\ldots,X^n)$, les E_j sont les $\mathbb{K}_{j-1}[X]$, $1\leq j\leq n+1$. Soit $u\in\mathcal{L}(E)$; la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure si et seulement si : $\forall P\in E\quad \deg u(P)\leq\deg P$.

II - Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

1) Généralités

Théorème : soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u\in\mathcal{L}(E)$; l'application

$$\begin{array}{cccc}\phi_u: & \mathbb{K}[X] & \to & \mathcal{L}(E)\\ & P=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kX^k & \mapsto & P(u)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_ku^k\end{array}$$

est linéaire et multiplicative de $(\mathbb{K}[X],+,.,\times)$ dans $(\mathcal{L}(E),+,.,\circ)$. Notamment,

$$\forall(P,Q)\in\mathbb{K}[X]^2\quad P(u)\circ Q(u)=(P\times Q)(u)=Q(u)\circ P(u)\quad (P(u)\text{ et }Q(u)\text{ commutent})$$

De même, M étant fixée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'application

$$\begin{array}{cccc}\phi_M: & \mathbb{K}[X] & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\\ & P=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kX^k & \mapsto & P(M)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kM^k\end{array}$$

est linéaire et multiplicative de $(\mathbb{K}[X],+,.,\times)$ dans $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),+,.,\times)$.

Attention ! $u^0=\mathrm{Id}_E$ et $M^0=I_n$; ainsi, pour $P=a_0+a_1X+a_2X^2+\cdots$, on a

$$P(u)=\boxed{a_0\mathrm{Id}_E}+a_1u+a_2u^2+\cdots\quad\text{et}\quad P(M)=\boxed{a_0I_n}+a_1M+a_2M^2+\cdots$$

Propriété : soit $u\in\mathcal{L}(E)$; pour tout P de $\mathbb{K}[X]$, $\operatorname{Im}P(u)$ et $\operatorname{Ker}P(u)$ sont stables par u.

Définition : soient $u\in\mathcal{L}(E)$ et $P\in\mathbb{K}[X]$; P est *un polynôme annulateur de u* si et seulement si $P(u)=0$;
soient $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P\in\mathbb{K}[X]$; P est *un polynôme annulateur de M* si et seulement si $P(M)=0$.

Attention ! On dit que P *annule* u (*resp.* M), mais aussi que u *annule* P (*resp.* M *annule* P)...

<u>*Exemple*</u> : si $M=\begin{pmatrix}A_1 & & (0)\\ & \ddots & \\ (0) & & A_k\end{pmatrix}$ est diagonale par blocs, alors $P(M)=\begin{pmatrix}P(A_1) & & (0)\\ & \ddots & \\ (0) & & P(A_k)\end{pmatrix}$.

2) Applications

a) Calcul de puissances

Si P est un polynôme annulateur de $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la division euclidienne de X^k par P permet de calculer M^k : si $X^k=P\times Q_k+R_k$ et $P(M)=0$, alors $M^k=R_k(M)$.

Cette méthode est intéressante si l'on dispose d'un polynôme annulateur de bas degré, les “quelques” coefficients de R_k pouvant alors être déterminés par la résolution d'un système linéaire obtenu à l'aide des racines de P *(penser à utiliser la dérivation en cas de racine multiple).*

Exemple : soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/a & 1/a^2 \\ a & 0 & 1/a \\ a^2 & a & 0 \end{pmatrix}$; on vérifie aisément que $A^2 = A + 2I_3$, A admet ainsi le polynôme annulateur

$$P = X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2).$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, la division euclidienne de X^k par P s'écrit

$$X^k = P \times Q_k + \lambda_k X + \mu_k$$

où (λ_k, μ_k) vérifie le système $\begin{cases} -\lambda_k + \mu_k & = (-1)^k \\ 2\lambda_k + \mu_k & = 2^k \end{cases}$. Tous calculs faits,

$$A^k = \lambda_k A + \mu_k I_3 \quad \text{où} \quad \begin{cases} \lambda_k = \dfrac{1}{3}\left[2^k - (-1)^k\right] \\ \mu_k = \dfrac{1}{3}\left[2^k + 2(-1)^k\right] \end{cases}.$$

b) Calcul d'inverse

Si $P = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k$ est un polynôme annulateur de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, **tel que** $a_0 \neq 0$, alors

$$M \times \left(\sum_{k=1}^{p} a_k M^{k-1}\right) = -a_0 I_n \quad \text{d'où} \quad M^{-1} = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^{p} a_k M^{k-1}.$$

Exemple : pour la matrice A précédente, $A(A-I) = 2I_3$ donc $A^{-1} = \dfrac{1}{2}(A - I_3)$.

III - Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

1) Définitions. Notations

Définition : soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$.
λ est *une valeur propre de* u si et seulement s'il existe un vecteur **non nul** x de E tel que $u(x) = \lambda.x$; un tel vecteur est *un vecteur propre de* u *associé à la valeur propre* λ.
L'ensemble des valeurs propres de u est *le spectre de* u, noté $\mathrm{Sp}(u)$.
Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda.\mathrm{Id}_E)$ est *le sous-espace propre de* u *associé à la valeur propre* λ.

NB : 1) Les *droites stables* par u sont les droites dirigées par un vecteur propre de u.
2) Un vecteur propre est associé à une unique valeur propre (en effet, un vecteur propre est non nul par définition et, lorsque x est non nul, $\lambda.x = \mu.x \Rightarrow \lambda = \mu$).
3) $\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(u - \lambda.\mathrm{Id}_E) \neq \{0\}$; si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, le sous-espace propre associé $E_\lambda(u)$ contient le vecteur nul et les vecteurs propres de u associés à λ.
4) En dimension finie, $\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \Leftrightarrow \det(u - \lambda.\mathrm{Id}_E) = 0$; si u est représenté par sa matrice M dans une base de E et si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, le sous-espace propre associé s'obtient par résolution du système linéaire $MX = \lambda X$, soit $(M - \lambda I_n)X = 0$, qui n'est pas de Cramer ! Penser à utiliser la fonction `rref` de la calculatrice.
5) Cas de la valeur propre 0 : 0 est valeur propre de u si et seulement si u n'est pas injectif, autrement dit u est injectif si et seulement si $0 \notin \mathrm{Sp}(u)$.

Propriété : si u, v commutent dans $\mathcal{L}(E)$, les sous-espaces propres de u sont stables par v.

Propriété : si F est un sous-espace de E stable par $u \in \mathcal{L}(E)$ et si v désigne l'endomorphisme de F induit par u, alors

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \mathrm{Ker}(v - \lambda.\mathrm{Id}_F) = F \cap \mathrm{Ker}(u - \lambda.\mathrm{Id}_E)$$

donc $\mathrm{Sp}(v) \subset \mathrm{Sp}(u)$ et : $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(v) \quad E_\lambda(v) = F \cap E_\lambda(u)$.

Exemples : 1) Projecteurs, symétries ($\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E)$ est l'ensemble des *vecteurs invariants* par u).
2) Le spectre de u peut être vide : choisir par exemple un quart de tour dans $\mathbb{R}^2$.
3) Le spectre de u peut être infini : par exemple, pour $u : f \mapsto f'$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mathrm{Sp}\,(u) = \mathbb{R}$ avec

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad E_\lambda(u) = \left\{ t \mapsto Ae^{\lambda t}\ ,\ A \in \mathbb{R} \right\}.$$

Définition : soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; les *éléments propres* de M (valeurs propres, vecteurs propres, spectre et sous-espaces propres) sont ceux de l'endomorphisme $u = \mathrm{Can}\, M$ de $\mathbb{K}^n$ de matrice M dans la base canonique.

NB : 1) On identifie parfois M à l'endomorphisme $X \mapsto MX$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
2) Lorsque $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il est bon de distinguer $\mathrm{Sp}_\mathbb{R}(M)$ et $\mathrm{Sp}_\mathbb{C}(M)$, $\mathrm{Sp}_\mathbb{K}(M)$ étant l'ensemble des solutions dans $\mathbb{K}$ de l'équation (polynomiale) d'inconnue λ : $\det(M - \lambda I_n) = 0$.

Exemple : soit $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\det(M - \lambda I_2) = \lambda^2 + 1$ donc $\mathrm{Sp}_\mathbb{R}(M) = \emptyset$ tandis que

$\mathrm{Sp}_\mathbb{C}(M) = \{-i, i\}$.

Définition : deux matrices A, B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont *semblables* si et seulement s'il existe P dans $GL_n(K)$ telle que $B = P^{-1}AP$ (c'est-à-dire que A et B représentent un même endomorphisme dans deux bases $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ telles que P soit la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$).

Propriétés : 1) Deux matrices semblables ont même spectre (réciproque fausse !).
2) Soit P fixée dans $GL_n(\mathbb{K})$; l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est un automorphisme multiplicatif de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; en particulier,

$$\text{si } A = PBP^{-1}, \text{ alors } \forall k \in \mathbb{N} \quad A^k = PB^kP^{-1}.$$

<u>*Application*</u> : pour calculer les puissances de A, on peut chercher une matrice B semblable à A et dont les puissances sont faciles à calculer (c'est le cas notamment des matrices diagonales...).

<u>*Exemple*</u> : soit $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, il vient $\chi_A(t) = t(t-1)(t-16)$ et (cf. la fonction `rref` des calculatrices)

$$\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Vect}\,(0,1,1)\ ;\ \mathrm{Ker}\,(A - I) = \mathrm{Vect}\,(1,1,-1)\ ;\ \mathrm{Ker}\,(A - 16I) = \mathrm{Vect}\,(2,-1,1)$$

d'où $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$ avec $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

On en déduit

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad A^k = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16^k \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 + 4 \times 16^k & 2 - 2 \times 16^k & -2 + 2 \times 16^k \\ 2 - 2 \times 16^k & 2 + 16^k & -2 - 16^k \\ -2 + 2 \times 16^k & -2 - 16^k & 2 + 16^k \end{pmatrix}.$$

2) Premières propriétés

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, distinct de $\{0\}$.

1) Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)$; pour tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$, $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$ (et — plus précisément — si $u(x) = \lambda.x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda).x$).
Attention ! L'inclusion $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda.\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}\,\big(P(u) - P(\lambda).\mathrm{Id}_E\big)$ peut être stricte (*ex.* : symétrie)

2) Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$; si $P(u) = 0$, alors toute valeur propre de u est racine de P.
Attention ! Réciproque fausse : $X^2 - X$ est un polynôme annulateur de Id_E...

3) Toute somme d'une famille finie de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes deux à deux est directe.

4) Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes deux à deux est libre.

Dém. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1) Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(u)$ et x un vecteur propre de u associé ; $u(x) = \lambda.x$ et une récurrence immédiate montre que : $\forall k \in \mathbb{N} \quad u^k(x) = \lambda^k.x$; par combinaison linéaire j'obtiens alors, pour tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$: $P(u)(x) = P(\lambda).x$; x (non nul par hypothèse) est donc également vecteur propre de $P(u)$ associé à la valeur propre $P(\lambda)$.

2) Soient maintenant P un polynôme annulateur de u et λ une valeur propre de u ; d'après la propriété précédente, $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$, qui n'est autre que l'endomorphisme nul, dont l'unique valeur propre est 0 ; ainsi $P(\lambda) = 0$.

3) J'utilise la caractérisation (à connaître...) des sommes directes : soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des valeurs propres de u, distinctes deux à deux, et $x_1, \ldots, x_p$ des vecteurs respectivement de $E_{\lambda_1}(u), \ldots, E_{\lambda_p}(u)$ tels que $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} x_j = 0$. Il s'agit de montrer que tous les x_j sont nuls. Je fixe $i \in [\![1,p]\!]$ et je considère le polynôme de Lagrange $L_i = \displaystyle\prod_{k \neq i} \frac{X - \lambda_k}{\lambda_i - \lambda_k}$ (qui vérifie $L_i(\lambda_j) = \delta_{i,j}$ pour tout j). Pour tout j de $[\![1,p]\!]$, comme x_j est dans $E_{\lambda_j}(u)$, le calcul du 1) (fait pour un vecteur propre, mais banal si $x_j = 0$!) montre que :

$$L_i(u)(x_j) = L_i(\lambda_j).x_j.$$

Ainsi, $L_i(u)$ étant linéaire, j'ai d'une part

$$L_i(u)\left(\sum_{j=1}^{p} x_j\right) = \sum_{j=1}^{p} L_i(u)(x_j) = \sum_{j=1}^{p} L_i(\lambda_j).x_j = x_i \quad \text{car } L_i(\lambda_j) = \delta_{i,j}$$

et d'autre part

$$L_i(u)\left(\sum_{j=1}^{p} x_j\right) = 0 \quad \text{car } \sum_{j=1}^{p} x_j = 0 \quad \text{par hypothèse.}$$

Donc $x_i = 0$, cela pour tout i de $[\![1,p]\!]$, ce qu'il fallait démontrer : les $E_{\lambda_j}(u)$ sont en somme directe.

4) La question se ramène à une famille finie : soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des valeurs propres de u, distinctes deux à deux, et $x_1, \ldots, x_p$ des vecteurs propres respectivement associés. Supposons une combinaison linéaire nulle $\sum_{j=1}^{p} \alpha_j.x_j = 0$; pour tout j, le vecteur $\alpha_j.x_j$ appartient au sous-espace propre $E_{\lambda_j}(u)$. Or les $E_{\lambda_j}(u)$ sont en somme directe, d'après la propriété précédente. J'en déduis, d'après la caractérisation des sommes directes, que

$$\forall j \in [\![1,p]\!] \quad \alpha_j.x_j = 0 \quad \text{d'où} \quad \alpha_j = 0 \quad \text{car } x_j \neq 0 \text{ (vecteur propre !).}$$

Ainsi, la famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre.

Exemples

- homothéties : si $u = \lambda.\mathrm{Id}_E$, alors $\operatorname{Sp}(u) = \{\lambda\}$, $E_\lambda(u) = E$;
- projecteurs : si p projecteur, $p \neq 0$, $p \neq \mathrm{Id}_E$, alors $\operatorname{Sp}(p) = \{0,1\}$, $E = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker} p$;
- symétries : si s symétrie, $s \neq \pm\mathrm{Id}_E$, alors $\operatorname{Sp}(s) = \{1,-1\}$ et $E = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.

3) Polynôme caractéristique – Théorème de Cayley-Hamilton

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel **de dimension finie** n, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1) *Le polynôme caractéristique de* u est le polynôme χ_u associé à la fonction

$$t \mapsto \det(t.\mathrm{Id}_E - u) = (-1)^n \det(u - t.\mathrm{Id}_E).$$

2) *Le polynôme caractéristique de* M est le polynôme χ_M associé à la fonction

$$t \mapsto \det(t.I_n - M) = (-1)^n \det(M - t.I_n)$$

Théorème et définition : les valeurs propres de u (*resp.* M) sont les racines dans $\mathbb{K}$ de son polynôme caractéristique.
L'ordre de multiplicité d'une valeur propre de u (*resp.* M) est son ordre de multiplicité en tant que racine de χ_u (*resp.* χ_M).

Propriétés :

1) χ_u (*resp.* χ_M) est de degré n, avec plus précisément :

$$\chi_u(X) = X^n - \mathrm{Tr}(u) \cdot X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(u)$$
$$\chi_M(X) = X^n - \mathrm{Tr}(M) \cdot X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(M)$$

2) Si χ_u (*resp.* χ_M) est scindé sur $\mathbb{K}$, s'écrivant $\prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_k)$, alors

$$\mathrm{Tr}(u) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \quad \text{et} \quad \det(u) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k \qquad \left(\textit{resp. } \mathrm{Tr}(M) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \quad \text{et} \quad \det(M) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k\right).$$

NB : lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, si n **impair**, χ_u (*resp.* χ_M) admet toujours au moins une racine **réelle** (penser au théorème des valeurs intermédiaires. . .) ; par contraposée, s'il existe u (*resp.* M) n'admettant aucune valeur propre, nécessairement n est pair !

Théorème : a) Si F est un sous-espace de E stable par $u \in \mathcal{L}(E)$ et v l'endomorphisme induit, alors χ_v divise χ_u.

b) Si λ est valeur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$, alors la dimension de $E_\lambda(u)$ est au plus égale à l'ordre de multiplicité de λ.

Corollaire : pour une valeur propre simple, le sous-espace propre associé est une droite.

<u>**Théorème de Cayley-Hamilton**</u> *(dém. non exigible)*
Le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur, *i.e.*

$$\forall u \in \mathcal{L}(E) \quad \chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad (\textit{resp. } \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \chi_M(M) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}).$$

4) Polynôme minimal *(hors programme mais classique)*

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que u admet au moins un polynôme annulateur non nul (c'est toujours le cas en dimension finie !).

Alors l'ensemble des polynômes annulateurs de u est l'ensemble des multiples d'un unique polynôme unitaire π_u, appelé *polynôme minimal* de u.

<u>*Dém.*</u> Soit $\mathcal{P}_u$ l'ensemble des polynômes annulateurs de u ; par hypothèse $\mathcal{P}_u$ contient au moins un polynôme non nul, donc l'ensemble $\mathcal{E}$ des degrés des éléments non nuls de $\mathcal{P}_u$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, je dispose donc de $d = \min \mathcal{E}$ et d'un élément non nul B de $\mathcal{P}_u$ de degré d. Quitte à diviser B par son coefficient dominant, je peux supposer B unitaire et je note $\mathcal{M}_B$ l'ensemble des multiples de B, dans $\mathbb{K}[X]$.
Je sais que, pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$, $(BQ)(u) = B(u) \circ Q(u) = 0$ car $B(u) = 0$ par construction. Donc $BQ \in \mathcal{P}_u$; il en résulte que $\mathcal{M}_B \subset \mathcal{P}_u$.
Réciproquement, je considère $A \in \mathcal{P}_u$ et j'effectue la division euclidienne de A par B : $A = BQ + R$, où $\deg R < \deg B$. J'ai d'une part $A(u) = 0$ par hypothèse, d'autre part $A(u) = (BQ)(u) + R(u) = R(u)$, d'où $R \in \mathcal{P}_u$. J'en déduis que $R = 0$ (sinon $\deg R$ serait un élément de $\mathcal{E}$ strictement inférieur à d !). Ainsi $A = BQ \in \mathcal{M}_B$.
Finalement $\mathcal{P}_u$ est l'ensemble des multiples du polynôme unitaire B. Et si B_1 est un autre polynôme unitaire vérifiant cette propriété, j'ai B multiple de B_1, B_1 multiple de B et B, B_1 tous deux unitaires, d'où $B_1 = B$.

Ainsi, l'ensemble $\mathbb{K}[u]$ de tous les polynômes en u (l'image de l'application $P \mapsto P(u)$) n'est autre que $\mathbb{K}_{d-1}[u]$ admettant pour base $\left(\mathrm{Id}_E, u, \ldots u^{d-1}\right)$, de dimension d, degré du polynôme minimal π_u.
En effet, l'inclusion $\mathbb{K}_{d-1}[u] \subset \mathbb{K}[u]$ est banale, l'inclusion réciproque s'obtient par division euclidienne par π_u (si $A = \pi_u Q + R$, alors $A(u) = R(u) \ldots$) et la famille $\left(\mathrm{Id}_E, u, \ldots u^{d-1}\right)$ est libre par définition de d (si elle était liée il existerait un polynôme annulateur non nul de u, de degré strictement inférieur à d, d'où une contradiction !).

IV - Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables

1) Endomorphismes diagonalisables – Caractérisations

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Définition : u est *diagonalisable* si et seulement si E est somme directe des sous-espaces propres de u, *i.e.*

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u).$$

<u>Premières caractérisations</u> : les assertions suivantes sont équivalentes.

1) u est diagonalisable.

2) Il existe une base de E formée de vecteurs propres de u.

3) Il existe une base de E où la matrice de u est diagonale.

4) La somme des dimensions des sous-espaces propres de u vaut $n = \dim E$.

5) Le polynôme caractéristique de u est scindé et la dimension de chaque sous-espace propre est *égale* à l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante.

<u>Cas particulier</u> : si u admet n valeurs propres distinctes, u est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont des droites.

<u>Projecteurs associés</u> : soient u diagonalisable et $(p_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)}$ la famille de projecteurs associée à la décomposition $E = \bigoplus\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$. On a, pour tout x de E,

$$x = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} p_\lambda(x) \quad \text{d'où} \quad u(x) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \lambda . p_\lambda(x) \quad (\text{puisque } p_\lambda(x) \in E_\lambda(u)).$$

Autrement dit,

$$u = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \lambda . p_\lambda \quad \text{et par récurrence} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad u^k = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \lambda^k . p_\lambda$$

d'où par combinaison linéaire : $\forall P \in \mathbb{K}[X] \quad P(u) = \sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} P(\lambda) . p_\lambda$.

Il en résulte en particulier (cf. les polynômes de Lagrange) :

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u) \quad p_\lambda = L_\lambda(u) \quad \text{où} \quad L_\lambda(X) = \prod_{\substack{\mu \in \mathrm{Sp}(u) \\ \mu \neq \lambda}} \frac{X - \mu}{\lambda - \mu}.$$

Théorème : u est diagonalisable si et seulement si u annule un polynôme scindé sur $\mathbb{K}$ dont toutes les racines sont simples (en abrégé *scindé à racines simples* ou encore *simplement scindé*).

Attention ! Les racines du polynôme annulateur utilisé ne sont pas forcément toutes des valeurs propres de u.

Corollaire : u est diagonalisable si et seulement si u annule le polynôme $\prod\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$.

<u>Exemple</u> : projections, symétries.

Corollaire : si u est diagonalisable, pour tout sous-espace F stable par u, l'endomorphisme de F induit par u est aussi diagonalisable.

<u>Dém.</u> Soient u diagonalisable, P un polynôme annulateur scindé à racines simples de u (il en existe d'après le théorème précédent), F un sous-espace stable par u et v l'endomorphisme de F induit par u ; il est clair que : $\forall x \in F \quad P(v)(x) = P(u)(x) = 0$; ainsi P est également un polynôme annulateur de v, or P est scindé à racines simples ! Donc v est diagonalisable.

2) Matrices carrées diagonalisables

Définition : une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *diagonalisable* si et seulement si l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé l'est.

Conséquence : les résultats du § **1** s'appliquent...

Propriétés : soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$;

1) M est diagonalisable si et seulement si M est semblable à une matrice diagonale.

2) Lorsque M est diagonalisable, M s'écrit PDP^{-1} où D est diagonale et P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ à une base de vecteurs propres de M.

3) Si $M = PDP^{-1}$, alors pour tout polynôme Q, $Q(M) = P.Q(D).P^{-1}$ est diagonalisable
<u>*avec la même matrice de passage*</u>.

<u>*Exemples*</u> :

1) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet une unique valeur propre λ, alors A est diagonalisable si et seulement si $A = \lambda.I_n$ (en effet il n'y a pas d'autre matrice semblable à $\lambda.I_n$).

2) Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 1+a & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & 1+a \end{pmatrix}$: j'écris $A = a.I + U$ et je diagonalise U...

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

V - Endomorphismes et matrices carrées trigonalisables

1) Définitions

- Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$; u est *trigonalisable* si et seulement s'il existe une base de E où la matrice de u est triangulaire supérieure.
- $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *trigonalisable* si et seulement si l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé l'est, autrement dit si et seulement si M est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

2) Caractérisations

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- u est trigonalisable ;
- le polynôme caractéristique de u est scindé sur $\mathbb{K}$;
- u annule un polynôme scindé sur $\mathbb{K}$.

Corollaire : lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tout endomorphisme en dimension finie est trigonalisable.
Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

3) Exemples

1) Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -10 & -2 & 7 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$; j'ai $\chi_A(X) = (X-2)(X-3)^2$ donc $\mathrm{Sp}(A) = \{2,3\}$ et

$$E_2(A) = \mathrm{Vect}(1,1,2) \quad ; \quad E_3(A) = \mathrm{Vect}(1,-2,0)\ .$$

Par conséquent A n'est pas diagonalisable $(1+1<3)$; il est facile ici de trigonaliser A : en complétant la famille libre formée des deux vecteurs propres ci-dessus, j'obtiendrai dans une telle base une matrice de la forme :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & * \\ 0 & 3 & * \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Attention ! Une telle matrice peut ne pas être commode, notamment pour calculer les puissances de A à l'aide de la formule du binôme : les matrices $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ risquent de ne pas commuter.

On fait souvent l'effort d'obtenir une forme triangulaire et diagonale par blocs, en remarquant que :

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(A-2.I) \oplus \mathrm{Ker}(A-3.I)^2\ .$$

$\mathrm{Ker}(A-2.I)$ est la droite $\mathrm{Vect}(1,1,2)$ et $\mathrm{Ker}(A-3.I)^2$ est le plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x+y-z=0$; en effet,

$$(A-3.I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Il suffit alors de choisir un vecteur e_3 de $\mathrm{Ker}(A-3.I)^2 \setminus \mathrm{Ker}(A-3.I)$ et de poser $e_2 = (A-3.I)\,e_3$ pour que (e_2,e_3) soit une base de $\mathcal{P}$ (résultat classique, car $A-3.I$ induit sur $\mathcal{P}$ un endomorphisme nilpotent, d'indice 2, mais en l'occurrence la vérification est immédiate !).
De plus, j'ai par construction $(A-3.I)\,e_2 = (A-3.I)^2\,(e_3) = 0$; ainsi, en posant $f = \mathrm{Can}\,A$:

$$f(e_2) = 3.e_2 \quad \text{et} \quad f(e_3) = e_2 + 3.e_3$$

Par conséquent, en posant $e_1 = (1,1,2)$, j'ai $M_{(e_1,e_2,e_3)}f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *(forme de Jordan).*

Prenons par exemple $e_3 = (0,1,1)$ (qui est bien dans $\mathrm{Ker}(A-3.I)^2$ mais pas dans $\mathrm{Ker}(A-3.I)$) : $(A-3.I)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, d'où $e_2 = (-1,2,0)$ (qui est bien dans $\mathrm{Ker}(A-3.I)$ comme prévu).
Alors,

$$\text{avec } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \text{j'ai } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(P est sûrement inversible puisque j'ai accolé des bases de deux sous-espaces supplémentaires...).

2) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -3 \\ -10 & -12 & 0 & 10 \\ 6 & 6 & -1 & -5 \\ -13 & -14 & -1 & 10 \end{pmatrix}$; j'ai $\chi_A(X) = (X-3)(X+2)^3$ donc $\mathrm{Sp}(A) = \{-2,3\}$ et

$$E_{-2}(A) = \mathrm{Vect}(1,0,-1,1) \quad ; \quad E_3(A) = \mathrm{Vect}(1,-2,1,-2)\,.$$

On vérifie que $\mathrm{Ker}(A+2.I)^3$ est l'hyperplan $\mathcal{H}$ d'équation $x+y-t=0$, dont on choisit, dans le même esprit que ci-dessus, une base de la forme (e_2,e_3,e_4) avec $e_3 = (A+2.I)\,e_4$, $e_2 = (A+2.I)\,e_3$. Avec, par exemple, $e_4 = (1,-1,0,0)$, choisi dans $\mathrm{Ker}(A+2.I)^3 \setminus \mathrm{Ker}(A+2.I)^2$, j'obtiens

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ qui vérifie } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

3) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; j'ai $\chi_A(X) = (X+1)^3$ donc $\mathrm{Sp}(A) = \{-1\}$.

$E_{-1}(A)$ est le plan $\mathcal{P} = \mathrm{Ker}(A+I)$ d'équation $x+y-z=0$.

On pourrait se contenter de compléter arbitrairement une base de $\mathcal{P}$ pour montrer que A est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & * \\ 0 & -1 & * \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On peut gagner un 0 supplémentaire en “jordanisant” : $(A+I)^2 = 0$, donc, si je choisis e_3 dans $\mathrm{Ker}(A+I)^2 \setminus \mathrm{Ker}(A+I)$ et si je pose $e_2 = (A+I)e_3$, j'ai $(A+I)e_2 = 0$ et il reste à choisir e_1 ! Or e_2 est un vecteur non nul du **plan** $\mathrm{Ker}(A+I)$, il suffit donc de choisir e_1 tel que (e_1, e_2) soit une base dudit plan. Avec par exemple $e_3 = (0,0,1)$, j'obtiens $e_2 = (0,-1,-1)$ et je choisis (par exemple à nouveau !) $e_1 = (1,0,1)$. J'ai alors

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

VI - Exemples d'applications

1) Calcul des puissances d'une matrice carrée

a) Utilisation d'un polynôme annulateur

Déterminer le reste de la division euclidienne de X^k par P, où P est un polynôme annulateur (de préférence le polynôme minimal...) :

$$\text{si } X^k = PQ_k + R_k \quad \text{et} \quad P(A) = 0, \text{ alors} \quad A^k = R_k(A)$$

b) Diagonalisation ou trigonalisation

Si $A = PBP^{-1}$ alors $A^k = PB^kP^{-1}\ldots$

2) Approximation de la valeur propre de module maximal

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ un système de valeurs propres de A (son polynôme caractéristique étant scindé en vertu du théorème de d'Alembert !). Nous savons aussi que A est trigonalisable (cf. §**V.2**) ; il en résulte par une récurrence immédiate que

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \mathrm{Tr}(A^p) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^p.$$

Supposons en outre que A admet une unique valeur propre λ de module maximal (cf. le titre de la section...), c'est-à-dire que, en notant $I = \{k \in [\![1,n]\!] \ / \ \lambda_k \neq \lambda\}$

$$|\lambda| = \max_{1 \leq k \leq n} |\lambda_k| \quad \text{et} \quad \forall k \in I \quad |\lambda_k| < |\lambda|.$$

Notant m la multiplicité de ladite valeur propre λ, j'ai

$$\mathrm{Tr}(A^p) = m.\lambda^p + \sum_{k \in I} \lambda_k^p \underset{p \to \infty}{\sim} m.\lambda^p.$$

Alors, si $\lambda = 0$, $\mathrm{Tr}(A^p)$ est nulle à partir d'un certain rang (A est nilpotente) ; sinon,

$$\frac{\mathrm{Tr}\left(A^{p+1}\right)}{\mathrm{Tr}(A^p)} \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} \lambda.$$

3) Relations de récurrence linéaires à coefficients constants

On cherche l'ensemble des suites (u_n) de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ vérifiant une relation de la forme

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+\ell} = a_{\ell-1}.u_{n+\ell-1} + \cdots + a_0.u_n \qquad (R)$$

où ℓ est donné dans $\mathbb{N}^*$ et $a_0, \ldots, a_{\ell-1}$ donnés dans $\mathbb{K}$, $a_0 \neq 0$.

a) Traduction matricielle

À toute suite (u_n) on associe la suite (U_n) de vecteurs de $\mathcal{M}_{\ell,1}(\mathbb{K})$ définie par $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+\ell-1} \end{pmatrix}$.

En notant $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{\ell-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_\ell(\mathbb{K})$, on constate que (u_n) vérifie la relation (R) si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = MU_n$, soit si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n = M^n U_0$.

On est donc ramené au calcul des puissances de M.

b) Cas de l'ordre 2

Ici (R) s'écrit $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique $\chi_M = X^2 - aX - b$ et c'est un polynôme annulateur (théorème de Cayley-Hamilton !). La division euclidienne de X^n par χ_M s'écrit $X^n = \chi_M Q + \alpha X + \beta$, d'où $M^n = \alpha M + \beta I$.

<u>*1^{er} cas*</u> : M admet deux valeurs propres distinctes λ et μ dans $\mathbb{K}$

Alors (α, β) est la solution du système $\begin{cases} \alpha\lambda + \beta = \lambda^n \\ \alpha\mu + \beta = \mu^n \end{cases}$ et on en déduit l'existence de deux scalaires A, B indépendants de n tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = A\lambda^n + B\mu^n.$$

Plutôt que d'expliciter M^n, on peut (sachant qu'ils existent !) déterminer les valeurs de A et B en résolvant le système fourni par les valeurs de u_0 et u_1.

<u>*2^e cas*</u> : M admet une valeur propre double λ dans $\mathbb{K}$

Alors λ est également racine du polynôme dérivé χ_M', donc (α, β) est la solution du système $\begin{cases} \alpha\lambda + \beta = \lambda^n \\ \alpha = n\lambda^{n-1} \end{cases}$ et on en déduit l'existence de deux scalaires A, B indépendants de n tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (A + nB)\,\lambda^n.$$

A et B se déterminent comme dans le 1^{er} cas.

<u>*3^e cas*</u> : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et M admet deux valeurs propres complexes conjuguées (non réelles !) $re^{\pm i\theta}$

D'après le 1^{er} cas, u_n s'écrit sous la forme

$$r^n \left(A_1 e^{in\theta} + B_1 e^{-in\theta}\right), \quad (A_1, B_1) \in \mathbb{C}^2,$$

qui s'écrit sous la forme

$$r^n \left(A \cos n\theta + B \sin n\theta\right), \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

(car A_1 et B_1 sont nécessairement conjugués).

<u>*Bilan*</u> : on obtient donc la forme générale des solutions, selon la nature des solutions de l'équation $x^2 - ax - b = 0$, dite *équation caractéristique de la relation* (R).

<u>*Exemple*</u> : suite de Fibonacci, définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

Il faut se rappeler que la programmation récursive du calcul de u_n en collant à cette définition est à proscrire...

c) Structure de l'ensemble des solutions

Indépendamment de tout calcul matriciel, on peut montrer que l'ensemble $\mathcal{S}$ des suites vérifiant (R) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension ℓ.

En effet, il est clair que l'application $\phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \to & \mathbb{K}^\ell \\ (u_n) & \mapsto & (u_0, \dots, u_{\ell-1}) \end{array}$ est un isomorphisme.

4) Recherche de sous-espaces stables en dimension finie

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, F un sous-espace de E stable par u et v l'endomorphisme de F induit par u.

- Tout polynôme annulateur de u annule aussi v.
- Le polynôme caractéristique de v divise celui de u.

Ces remarques, accompagnées du théorème de Cayley-Hamilton, peuvent être utiles dans la recherche des sous-espaces stables par u.

Si, en outre, u est diagonalisable, alors

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u) \quad \text{et} \quad F = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \big(F \cap E_\lambda(u)\big)$$

(étant entendu que, parmi les $F \cap E_\lambda(u)$, certains peuvent être réduits à $\{0\}$).
En effet, v est diagonalisable, or

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u) \quad \mathrm{Ker}\,(v - \lambda.\mathrm{Id}_F) = F \cap \mathrm{Ker}\,(u - \lambda.\mathrm{Id}_E) = F \cap E_\lambda(u)$$

et $\mathrm{Sp}(v) \subset \mathrm{Sp}(u)$, donc les sous-espaces propres de v sont les $F \cap E_\lambda(u)$ qui ne sont pas réduits à $\{0\}$.

On en déduit le résultat suivant (la réciproque étant évidente).

Propriété : si u est diagonalisable, les sous-espaces de E stables par u sont les sous-espaces de la forme $\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} F_\lambda$ où, pour tout λ, F_λ est un sous-espace de $E_\lambda(u)$, éventuellement $\{0\}$.

5) Diagonalisation simultanée

Si u, v dans $\mathcal{L}(E)$ commutent et sont diagonalisables, alors il existe une base de E formée de vecteurs propres communs à u et v (*i.e.* où les matrices de u et v sont toutes deux diagonales).

Dém. $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$ et les $E_\lambda(u)$ sont stables par v (puisque u et v commutent).

Or v est diagonalisable, donc pour tout λ l'endomorphisme de $E_\lambda(u)$ induit par v est diagonalisable. Je dispose donc d'une base de $E_\lambda(u)$ formée de vecteurs propres de v, qui sont aussi des vecteurs propres de u !

En accolant les bases ainsi obtenues pour les différentes valeurs de λ, j'obtiens le résultat souhaité.

NB : lorsque u admet n valeurs propres distinctes en dimension n, rappelons que u est diagonalisable et que ses sous-espaces propres sont n droites. Alors, si v commute avec u, ces droites sont stables par v et donc toute base de vecteurs propres de u est aussi une base de vecteurs propres de v ! En particulier, v est diagonalisable !!

6) Sous-espaces caractéristiques *(complément hors programme)*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, λ une valeur propre de u de multiplicité m.
Classiquement, la suite $\left(\mathrm{Ker}\,(u - \lambda\mathrm{Id}_E)^j\right)_{j \in \mathbb{N}}$ est croissante et — comme E est de dimension finie — je dispose de $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda\mathrm{Id}_E)^k = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda\mathrm{Id}_E)^{k+1}$. Je démontre alors que

$$E = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda\mathrm{Id}_E)^k \oplus \mathrm{Im}\,(u - \lambda\mathrm{Id}_E)^k \quad \text{avec} \quad \dim \mathrm{Ker}\,(u - \lambda\mathrm{Id}_E)^k = m.$$

$\mathrm{Ker}\,(u - \lambda\mathrm{Id}_E)^k$ est le *sous-espace caractéristique de u associé à λ*.

L'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda\mathrm{Id}_E)^k$ a λ pour unique valeur propre, tandis que l'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{Im}\,(u - \lambda\mathrm{Id}_E)^k$ n'admet pas λ pour valeur propre.

Lorsque le polynôme caractéristique de u est scindé, j'en déduis par récurrence que E est la somme directe des sous-espaces caractéristiques de u.

C'est la première étape de la réduction de Jordan.

<u>*Dém.*</u> Pour f, g dans $\mathcal{L}(E)$, je démontre classiquement, en appliquant le théorème du rang à la restriction de f à $\operatorname{Im} g$, que

$$\operatorname{rg} g = \operatorname{rg} f \circ g + \dim\left(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} g\right).$$

Toujours classiquement, comme

$$\operatorname{Ker}\left(u - \lambda \mathrm{Id}_E\right)^k = \operatorname{Ker}\left(u - \lambda \mathrm{Id}_E\right)^{k+1},$$

j'ai

$$\operatorname{Ker}\left(u - \lambda \mathrm{Id}_E\right)^k = \operatorname{Ker}\left(u - \lambda \mathrm{Id}_E\right)^{2k},$$

d'où grâce au théorème du rang

$$\operatorname{rg}\left(u - \lambda \mathrm{Id}_E\right)^k = \operatorname{rg}\left(u - \lambda \mathrm{Id}_E\right)^{2k}$$

et donc, grâce au résultat précédent (avec $f = g = \left(u - \lambda \mathrm{Id}_E\right)^k$)

$$\operatorname{Ker}\left(u - \lambda \mathrm{Id}_E\right)^k \cap \operatorname{Im}\left(u - \lambda \mathrm{Id}_E\right)^k = \{0\}.$$

Ces deux sous-espaces sont donc en somme directe, mais la somme de leurs dimensions est $\dim E$, toujours d'après le théorème du rang ; ils sont donc supplémentaires. Ils sont également stables par u (noyau et image d'un endomorphisme qui commute avec u en tant que polynôme en u).

Soit v (*resp.* w) l'endomorphisme induit par u sur $F = \operatorname{Ker}\left(u - \lambda \mathrm{Id}_E\right)^k$ (*resp.* sur $G = \operatorname{Im}\left(u - \lambda \mathrm{Id}_E\right)^k$).

Par construction $\left(v - \lambda \mathrm{Id}_F\right)^k = 0$ (car : $\forall x \in F \quad \left(v - \lambda \mathrm{Id}_F\right)^k(x) = \left(u - \lambda \mathrm{Id}_E\right)^k(x) = 0$).

Donc $(X - \lambda)^k$ est un polynôme annulateur de v, par conséquent λ est la seule valeur propre possible de v. Or λ est bien valeur propre de v puisque F contient $\operatorname{Ker}\left(u - \lambda \mathrm{Id}_E\right) = E_\lambda(u)$ et que tout vecteur propre de u appartenant à F est vecteur propre de v !

Donc $\operatorname{Sp}(v) = \{\lambda\}$; on en déduit classiquement que $\chi_v = (X - \lambda)^d$ où $d = \dim F$ (car $v - \lambda \mathrm{Id}_F$ est nilpotent…).

Enfin λ n'est pas valeur propre de w : si $x \in G$ vérifie $w(x) = \lambda x$, alors $u(x) = \lambda x$ par définition de w, mézalor $x \in E_\lambda(u)$, donc $x \in F \cap G$, c'est-à-dire que $x = 0$.

Comme $\chi_u(t) = \chi_v(t) \times \chi_w(t)$ (déterminant d'une matrice diagonale par blocs puisque F et G sont stables par u), j'en déduis

$$\chi_u(t) = (t - \lambda)^d \times \chi_w(t)$$

où χ_w n'admet pas λ pour racine.

Il en résulte que d est exactement l'ordre de multiplicité de la racine λ de χ_u, ce qu'il fallait démontrer.