1. Compléments d'algèbre linéaire

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

I - Combinaisons linéaires – Bases

On généralise ici les notions étudiées en 1re année au cas d'un ensemble d'indices I non nécessairement fini *(complément hors programme en PSI)*.

1) Combinaisons linéaires

Définition : *le support* d'une famille de scalaires $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ est $\{i \in I \ / \ \lambda_i \neq 0\}$. On note $\mathbb{K}^{(I)}$ l'ensemble des familles de scalaires *à support fini.*

Propriété : $\mathbb{K}^{(I)}$ est un sous-espace vectoriel de $\left(\mathbb{K}^I, +, .\right)$.

Définition : soit $\mathcal{F} = (x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. On dit qu'un vecteur x de E est *combinaison linéaire* des vecteurs de $\mathcal{F}$ si et seulement s'il existe une famille $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ telle que $x = \sum_{i\in I} \lambda_i.x_i$ (il s'agit d'une **somme finie** de vecteurs de E...).

2) Bases

a) Familles génératrices

Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E. On dit que $\mathcal{F}$ est une *famille génératrice* de E si et seulement si tout vecteur de E est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$.

b) Sous-espace engendré par une famille de vecteurs

Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E et F l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{F}$.
F est un sous-espace vectoriel de E ; c'est le plus petit sous-espace de E contenant les vecteurs de $\mathcal{F}$.
F est noté $\operatorname{Vect}\mathcal{F}$, appelé *le sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathcal{F}$* ($\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $\operatorname{Vect}\mathcal{F}$!).

NB : une famille $\mathcal{F}$ est génératrice de E si et seulement si $\operatorname{Vect}\mathcal{F} = E$.

c) Familles libres

Soit $\mathcal{F} = (x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. On dit que $\mathcal{F}$ est *libre* si et seulement si la seule combinaison linéaire nulle des vecteurs de $\mathcal{F}$ est celle dont tous les coefficients sont nuls :

$$\forall(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \quad \left(\sum_{i\in I} \lambda_i.x_i = 0 \Longrightarrow \forall i \in I \quad \lambda_i = 0\right).$$

$\mathcal{F}$ est libre si et seulement si toutes ses sous-familles finies sont libres.
Une partie A de E est dite libre si et seulement si la famille $(x)_{x\in A}$ est libre.
Par convention, $\emptyset$ est libre.

d) Bases

Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E.
On dit que $\mathcal{F}$ est une *base* de E si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre et génératrice.
Une famille $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est une base de E si et seulement si tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$. Dans ce cas, si $x = \sum_{i\in I} \lambda_i.e_i$, la famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ est appelée ***la** famille des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.*

Exemple : $\left(X^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$, appelée *la base canonique de* $\mathbb{K}[X]$.

NB : l'existence de bases en dimension quelconque est liée à l'*axiome du choix*...

e) Caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base

Théorème : soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in I}$ une base de E et $(y_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F (indexées par *le même* ensemble I).
Il existe une unique application linéaire u de E dans F telle que : $\forall i \in I \quad u(e_i) = y_i$.
En outre ladite application linéaire u vérifie :

* $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(y_i)_{i\in I}$: u est surjective si et seulement si la famille $(y_i)_{i\in I}$ engendre F.
* u est injective si et seulement si la famille $(y_i)_{i\in I}$ est libre.
* u est bijective si et seulement si la famille $(y_i)_{i\in I}$ est une base de F.

NB : dans le cas particulier où $E = \mathbb{K}^{(I)}$, muni de la *base canonique* $(e_i)_{i\in I}$, où $e_i = (\delta_{i,j})_{j\in I}$, $\operatorname{Ker} u$ est l'ensemble des familles de coefficients des relations de dépendance linéaire de la famille $(y_i)_{i\in I}$ (la famille nulle mise à part !).

II - Structure d'algèbre

1) Définition

On appelle $\mathbb{K}$-*algèbre* tout quadruplet $(A, +, ., \times)$ où :

1) $(A, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ;

2) $(A, +, \times)$ est un anneau ;

3) $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall (x, y) \in A^2 \quad \lambda.(x \times y) = (\lambda.x) \times y = x \times (\lambda.y)$

Une $\mathbb{K}$-algèbre $(A, +, ., \times)$ est dite *commutative* si et seulement si $\times$ est en outre commutative.

NB : le point **3)** et la distributivité de $\times$ par rapport à $+$ reviennent à dire que l'application $(x, y) \mapsto x \times y$ est *bilinéaire* de $E \times E$ dans E.

2) Exemples

1) $\mathbb{K}$-algèbre commutative $(\mathbb{K}[X], +, ., \times)$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

2) $\mathbb{K}$-algèbre $(\mathcal{L}(E), +, ., \circ)$ des endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

3) $\mathbb{K}$-algèbre $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, ., \times)$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

III - Sommes directes de sous-espaces vectoriels

Dans tout ce paragraphe, I est un ensemble **fini non vide**.

1) Produit d'une famille finie de sous-espaces-vectoriels

On généralise la notion de produit cartésien de deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels en définissant *le produit d'une famille finie* $(E_i)_{i\in I}$ *de* $\mathbb{K}$-*espaces vectoriels*, ensemble des familles de vecteurs de la forme $(x_i)_{i\in I}$ où, pour tout i, $x_i \in E_i$, ensemble noté $\prod_{i\in I} E_i$.

Théorème : $\left(\prod_{i\in I} E_i, +, .\right)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, les lois $+$ et . étant définies par

$$\text{pour } x = (x_i)_{i\in I} \text{ et } y = (y_i)_{i\in I} \text{ dans } \prod_{i\in I} E_i \quad : \quad x + y = (x_i + y_i)_{i\in I}$$

$$\text{pour } \lambda \in \mathbb{K} \text{ et } x = (x_i)_{i\in I} \text{ dans } \prod_{i\in I} E_i \quad : \quad \lambda.x = (\lambda.x_i)_{i\in I}$$

Propriété : si les E_i sont tous de dimension finie, alors $\prod_{i\in I} E_i$ est de dimension finie égale à $\sum_{i\in I} \dim E_i$.

2) Somme d'une famille finie de sous-espaces-vectoriels

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(E_i)_{i\in I}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E.
L'espace produit $\prod\limits_{i\in I} E_i$ s'identifie au sous-espace vectoriel de E^I (l'espace des familles de vecteurs de E indexées par I) formé des familles $(x_i)_{i\in I}$ de E^I telles que : $\forall i \in I \quad x_i \in E_i$.

Théorème et définition : avec les notations précédentes, l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \prod\limits_{i\in I} E_i & \to & E \\ (x_i)_{i\in I} & \mapsto & \sum\limits_{i\in I} x_i \end{array}$

est linéaire. Son image, notée $\sum\limits_{i\in I} E_i$, est un sous-espace vectoriel de E appelé *somme des* E_i, $i \in I$.

$\sum\limits_{i\in I} E_i$ est l'ensemble des sommes de la forme $\sum\limits_{i\in I} x_i$, $(x_i)_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} E_i$.
$\sum\limits_{i\in I} E_i$ est le plus petit sous-espace de E contenant les E_i, $i \in I$.

Autrement dit : $\sum\limits_{i\in I} E_i = \mathrm{Vect}\left(\bigcup\limits_{i\in I} E_i\right)$.

<u>*Cas particulier*</u> : si F, G sont deux sous-espaces de E,

$$F + G = \{y + z,\ (y,z) \in F \times G\} = \mathrm{Vect}\,(F \cup G)\,.$$

3) Somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels

Définition : (mêmes notations) les E_i, $i \in I$ sont dits *en somme directe* si et seulement si tout vecteur x de $\sum\limits_{i\in I} E_i$ s'écrit **de manière unique** sous la forme $x = \sum\limits_{i\in I} x_i$, $(x_i)_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} E_i$
(c'est-à-dire si et seulement si l'application linéaire φ du **§1** est injective).
Si c'est le cas, le sous-espace $\sum\limits_{i\in I} E_i$ est noté $\bigoplus\limits_{i\in I} E_i$, appelé *somme directe des* E_i, $i \in I$.

Caractérisation : toujours avec les mêmes notations, les assertions suivantes sont équivalentes :

a) les E_i, $i \in I$ sont en somme directe ;

b) $\forall\,(x_i)_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} E_i \quad \sum\limits_{i\in I} x_i = 0 \Rightarrow \forall i \in I \quad x_i = 0$;

c) $\forall i \in I \quad E_i \cap \left(\sum\limits_{j\neq i} E_j\right) = \{0\}$ (*i.e.* l'intersection de chaque sous-espace avec la somme des autres est réduite à $\{0\}$).

Attention ! Il ne suffit pas que les intersections des sous-espaces pris deux à deux soient réduites à $\{0\}$ (voir par exemple trois droites vectorielles distinctes dans un plan).

<u>*Dém.*</u> Je remarque tout d'abord que les assertions **a)** et **b)** sont toutes deux équivalentes à l'injectivité de l'application linéaire φ : **a)** signifie par définition d'une somme directe que tout élément de $\mathrm{Im}\,\varphi$ admet au plus un antécédent, tandis que **b)** signifie que $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{0\}$. J'en déduis par transitivité de l'équivalence que **a)** et **b)** sont équivalentes.
Je montre ensuite l'équivalence entre **b)** et **c)** par double implication :

- **b)** $\Rightarrow$ **c)** : je suppose **b)** et, pour prouver **c)**, je fixe arbitrairement i dans I et je considère un vecteur x élément de $E_i \cap \left(\sum\limits_{j\neq i} E_j\right)$. Ainsi, d'une part x est élément de E_i, d'autre part x s'écrit

$$x = \sum_{j\neq i} x_j \quad \text{où} \quad x_j \in E_j, \text{ pour tout } j \text{ dans } I\setminus\{i\}\ .$$

Je pose (habilement) $x_i = -x$: la famille $(x_j)_{j\in I}$ vérifie alors, par construction,

$$(x_j)_{j\in I} \in \prod_{j\in I} E_j \quad \text{et} \quad \sum_{j\in I} x_j = 0$$

donc, d'après **b)**, tous les x_j sont nuls, en particulier $x = 0$. **c)** en résulte.

- **c)** $\Rightarrow$ **b)**: par contraposition, je suppose "non **b)**", je dispose donc d'une famille $(x_i)_{i\in I}$ dans $\prod_{i\in I} E_i$ de vecteurs dont la somme est nulle alors que les x_i ne sont pas tous nuls. Soit donc i_0 tel que $x_{i_0} \neq 0$. x_{i_0} appartient à E_{i_0} et donc $\sum_{j\neq i_0} x_j = -x_{i_0}$ est un vecteur non nul de $E_{i_0} \cap \left(\sum_{j\neq i_0} E_j\right)$, ce qui prouve "non **c)**" et achève la démonstration.

Cas particulier : deux sous-espaces F, G de E sont en somme directe si et seulement si

$$F \cap G = \{0\} \ .$$

F et G sont *supplémentaires* si et seulement si $E = F \oplus G$.

NB : $E = \sum_{i\in I} E_i$ si et seulement si l'application φ est surjective ;
$E = \bigoplus_{i\in I} E_i$ si et seulement si φ est un isomorphisme, dans ce cas chaque E_i est un supplémentaire dans E de la somme des autres, à savoir $F_i = \sum_{j\neq i} E_j$ (qui est également une somme directe).

4) Famille de projecteurs associée à une somme directe

Soit $E = \bigoplus_{i\in I} E_i$; on associe à cette décomposition de E la famille $(p_i)_{i\in I}$ de projecteurs de E où, pour tout i dans I, p_i est la projection de E sur E_i parallèlement à $F_i = \sum_{j\neq i} E_j$ (voir la remarque ci-dessus).
Alors, la décomposition de tout vecteur x de E suivant la somme directe $\bigoplus_{i\in I} E_i$ n'est autre que

$$x = \sum_{i\in I} p_i(x) \ .$$

(En effet, soit $x = \sum_{j\in I} x_j$ cette décomposition ; pour i fixé dans I, x s'écrit

$$x = x_i + y_i \ , \quad \text{où} \quad x_i \in E_i \quad \text{et} \quad y_i = \sum_{j\neq i} x_j \in F_i \ ,$$

par conséquent x_i est bien égal à $p_i(x)$, par définition de la projection p_i.)

NB : la famille $(p_i)_{i\in I}$ d'endomorphismes de E vérifie :

* $\sum_{i\in I} p_i = \mathrm{Id}_E$ (d'après la propriété précédente) ;
* pour i, j distincts dans I, $p_i \circ p_j = 0$ (car $\mathrm{Im}\, p_j = E_j \subset F_i = \mathrm{Ker}\, p_i$).

Exercice : établir réciproquement que, si $(p_i)_{i\in I}$ est une famille d'endomorphismes de E vérifiant les deux propriétés ci-dessus, alors les p_i sont des projecteurs de E, $E = \bigoplus_{i\in I} \mathrm{Im}\, p_i$ et $(p_i)_{i\in I}$ est – au sens précédent – la famille de projecteurs associée à cette décomposition de E.

Cas particulier de deux sous-espaces supplémentaires
Soient $E = F \oplus G$ et p, q les projecteurs associés, on a $p + q = \mathrm{Id}_E$, $p \circ q = q \circ p = 0$.
$s = 2p - \mathrm{Id}_E$ et $-s = 2q - \mathrm{Id}_E$ sont les symétries associées.

5) Prolongement linéaire d'applications linéaires

Théorème : soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $(E_i)_{i\in I}$ une famille finie de sous-espaces de E telle que $E = \bigoplus_{i\in I} E_i$ et, pour tout i dans I, u_i une application linéaire de E_i dans F.
Il existe alors une unique application linéaire u de E dans F telle que

$$\forall i \in I \quad u_{|E_i} = u_i \text{ (la \textit{restriction} de } u \text{ à } E_i \text{ est } u_i).$$

En outre, u est définie par : $\forall x \in E \quad u(x) = \sum_{i\in I} u_i[p_i(x)]$,
où $(p_i)_{i\in I}$ est la famille de projecteurs associée à la décomposition $E = \bigoplus_{i\in I} E_i$.

Dém. Analyse – synthèse...

NB : on se permet parfois d'écrire $u = \sum_{i \in I} u_i \circ p_i$ car l'image de p_i est incluse dans l'ensemble de départ de u_i...

Exemple : si E_1 est un sous-espace de E et $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$, on peut prolonger u_1 en une application linéaire de E dans F grâce au théorème précédent, en utilisant un *supplémentaire* E_2 de E_1 dans E (en choisissant par exemple $u_2 = 0 \in \mathcal{L}(E_2, F)$!).

Attention ! $u : x \mapsto \begin{cases} u_1(x) & \text{si } x \in E_1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est bien un prolongement de u_1 à E, mais non linéaire "en général" (<u>*exercice*</u> : CNS sur E_1 et u_1 pour que u soit linéaire ?).

6) En dimension finie

Ici, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Les résultats précédents s'appliquent bien sûr dans le cas particulier de la dimension finie.
On a en outre le :

Théorème : soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E.

a) les E_i, $i \in I$, sont en somme directe si et seulement si $\dim \left(\sum_{i \in I} E_i \right) = \sum_{i \in I} \dim E_i$;

b) *dans le cas où les E_i sont en somme directe*, E est égal à $\bigoplus_{i \in I} E_i$ si et seulement si $\dim E = \sum_{i \in I} \dim E_i$.

<u>*Dém.*</u> Soit $S = \sum_{i \in I} E_i$; l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \prod_{i \in I} E_i & \to & S \\ (x_i)_{i \in I} & \mapsto & \sum_{i \in I} x_i \end{array}$ est linéaire et surjective.

De plus, les E_i sont en somme directe si et seulement si φ est injective, donc si et seulement si φ est un isomorphisme, soit si et seulement si $\prod_{i \in I} E_i$ et S sont de même dimension. Le **a)** en découle.

Le **b)** est immédiat, compte tenu du **a)**, puisque S est un sous-espace de E, donc $E = S$ si et seulement si $\dim S = \dim E$.

<u>*Exemple*</u> : si $(e_i)_{i \in I}$ est une famille finie de vecteurs non nuls de E, les droites vectorielles $\mathbb{K}.e_i$ sont en somme directe si et seulement si la famille $(e_i)_{i \in I}$ est libre.

Définition : (bases *adaptées*)

a) si F est un sous-espace de E, une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E est dite *adaptée à F* si et seulement si les premiers vecteurs de $\mathcal{B}$ forment une base de F ;

b) si $E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_k$, une base $\mathcal{B}$ de E est dite *adaptée à la décomposition* $E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_k$ si et seulement si les premiers vecteurs de $\mathcal{B}$ forment une base de E_1, les suivants une base de E_2...

<u>*Fractionnement d'une base*</u> : si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et $(I_1, \dots, I_p)$ une partition de $\mathbb{N}_n$, alors

$$E = \bigoplus_{k=1}^{p} \operatorname{Vect}(e_i)_{i \in I_k}.$$

IV - Isomorphismes classiques et applications

1) Isomorphisme de tout supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans $\operatorname{Im} u$

Théorème : soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et E' un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E ;
alors u définit un isomorphisme de E' dans $\operatorname{Im} u$, c'est-à-dire que
$u' : \begin{array}{ccc} E' & \to & \operatorname{Im} u \\ x & \mapsto & u(x) \end{array}$ est un isomorphisme.

Dém. L'application u' est bien définie, linéaire comme u ; de plus :

- u' est injective : si $x \in \operatorname{Ker} u'$, alors $x \in E'$ et $u(x) = 0$, donc $x \in E' \cap \operatorname{Ker} u$ d'où $x = 0$ puisque E' et $\operatorname{Ker} u$ sont supplémentaires ;
- u' est surjective : soit $y \in \operatorname{Im} u$; par définition de $\operatorname{Im} u$, je dispose d'un élément x de E tel que $u(x) = y$; comme $E = E' \oplus \operatorname{Ker} u$, x s'écrit $x = x' + z$ avec $x' \in E'$ et $z \in \operatorname{Ker} u$. J'ai alors :
$$y = u(x) = u\left(x' + z\right) = u\left(x'\right) + u(z) = u'\left(x'\right) \quad \text{car } x' \in E' \text{ et } z \in \operatorname{Ker} u.$$
Donc tout élément de $\operatorname{Im} u$ admet au moins un antécédent par u'.

En conclusion, u' est linéaire et bijective, donc un isomorphisme de E' dans $\operatorname{Im} u$.

Application – théorème du rang

Si E est de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $\operatorname{Im} u$ est de dimension finie et
$$\dim \operatorname{Im} u + \dim \operatorname{Ker} u = \dim E.$$

Corollaire : 1) Lorsque $\dim E = \dim F = n$, u est un isomorphisme si et seulement si $\operatorname{rg} u = n$.
2) Le rang est invariant par composition avec un isomorphisme.

2) Isomorphisme entre deux supplémentaires d'un même sous-espace

Théorème : soient E' un sous-espace vectoriel de E, F_1 et F_2 deux supplémentaires de E' dans E ; la projection de E sur F_1 parallèlement à E' définit un isomorphisme de F_2 dans F_1.

Dém. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ cette projection ; F_2 est un supplémentaire dans E de E' qui n'est autre que le noyau de p, tandis que F_1 est l'image de p : le théorème du paragraphe précédent fournit donc le résultat.

3) Application : notion d'hyperplan

Définition : on appelle *hyperplan de* E tout sous-espace de E admettant une droite pour supplémentaire.

Propriétés : soit H un hyperplan de E.
1) Si F est un sous-espace de E contenant H, alors $F = H$ ou $F = E$.
2) Pour tout vecteur a de $E \backslash H$, $E = H \oplus \mathbb{K}.a$.
3) Deux hyperplans quelconques de E sont isomorphes.

Dém. Fixons un vecteur b de E tel que $E = H \oplus \mathbb{K}.b$ (il en existe par définition d'un hyperplan !).
1) Soit F un sous-espace de E contenant H. Deux cas se présentent :

- si $b \in F$, alors F contient H et $\mathbb{K}.b$, donc F contient la somme $H + \mathbb{K}.b$ qui n'est autre que E tout entier *($H + \mathbb{K}.b$ est le plus petit – au sens de l'inclusion – des sous-espaces de E contenant H et $\mathbb{K}.b$)* ; d'où $F = E$ dans ce cas ;
- si $b \notin F$, alors je montre que $F = H$; j'ai déjà $F \supset H$, soit donc x un vecteur de F ; comme $E = H \oplus \mathbb{K}.b$, je dispose de h dans H et de λ dans $\mathbb{K}$ tels que $x = h + \lambda.b$ et nécessairement $\lambda = 0$ (sinon $b = \dfrac{1}{\lambda} \cdot (x - h)$ appartiendrait à F, d'où une contradiction) ; ainsi $x = h$ appartient à H, ceci pour tout x de F, autrement dit $F \subset H$, ce qui achève la démonstration.

2) Soit $a \in E \backslash H$; $H \cap \mathbb{K}.a = \{0\}$ (sinon a serait élément de H) ; de plus $F = H + \mathbb{K}.a$ est un sous-espace de E contenant H et a, donc $F \neq H$ d'où – grâce au **1)** – $F = E$; en conclusion, H et $\mathbb{K}.a$ sont supplémentaires, ce qu'il fallait démontrer.

3) Soient H_1 et H_2 deux hyperplans de E, distincts (s'ils sont égaux, ils sont isomorphes !). Si j'avais $H_1 \subset H_2$, j'aurais $H_2 = E$ d'après **1)**, d'où une contradiction. Comme les rôles sont symétriques, j'ai $H_1 \not\subset H_2$ et $H_2 \not\subset H_1$; il en résulte (classique !) que $H_1 \cup H_2$ n'est pas stable par l'addition, donc est strictement inclus dans E. Fixons donc $a \in E \backslash \left(H_1 \cup H_2\right)$; d'après **2)**, H_1 et H_2 sont des supplémentaires de la même droite $\mathbb{K}.a$; il sont par conséquent isomorphes d'après le théorème précédent.

Exemples :

1) Si E est de dimension finie $n \geq 1$, les hyperplans de E sont les sous-espaces de dimension $n-1$.

2) Dans $\mathbb{K}[X]$, pour $\alpha \in \mathbb{K}$, l'ensemble des multiples de $X-\alpha$, polynôme de degré 1, admet pour supplémentaire la droite vectorielle $\mathbb{K}_0[X] = \mathbb{K}$; c'est donc un hyperplan de $\mathbb{K}[X]$, égal à $\{P \in \mathbb{K}[X] \ / \ P(\alpha) = 0\}$ (le noyau de la forme linéaire $P \mapsto P(\alpha)$).

V - Hyperplans et formes linéaires

1) Équations d'un hyperplan

Théorème : soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $E \neq \{0\}$.

1) Si φ est une forme linéaire non nulle sur E, $H = \operatorname{Ker}\varphi$ est un hyperplan de E (dit *l'hyperplan d'équation* $\varphi(x) = 0$).
De plus, toute forme linéaire ψ nulle sur H est colinéaire à φ.

2) Si H est un hyperplan de E, alors il existe des formes linéaires sur E dont H est le noyau. De plus, si $H = \operatorname{Ker}\varphi$, alors l'ensemble des formes linéaires ψ sur E telles que $H = \operatorname{Ker}\psi$ est $\{\lambda.\varphi,\ \lambda \in \mathbb{K}^*\}$ (autrement dit l'équation de H est unique à un coefficient multiplicatif non nul près).

Dém. **1)** Soit φ forme linéaire non nulle sur E et b dans E tel que $\varphi(b) \neq 0$; je pose $a = \dfrac{1}{\varphi(b)} \cdot b$, alors $\varphi(a) = 1$. Montrons que tout vecteur x de E s'écrit de manière unique $x = h + \lambda.a$ avec $(h, \lambda) \in H \times \mathbb{K}$ (où $H = \operatorname{Ker}\varphi$).
Analyse : si le couple (h, λ) existe, nécessairement $\varphi(x) = \varphi(h) + \lambda\varphi(a) = \lambda$ car $\varphi(h) = 0$ et $\varphi(a) = 1$, la seule solution possible est donc donnée par $\lambda = \varphi(x)$ et $h = x - \varphi(x).a$.
Synthèse : je pose $\lambda = \varphi(x)$ et $h = x - \varphi(x).a$. J'ai bien $x = h + \lambda.a$,$\varphi(h) = \varphi(x) - \lambda\varphi(a) = 0$ donc $h \in H$, et $\lambda \in \mathbb{K}$.
En conclusion, $E = H \oplus \mathbb{K}.a$, ce qui prouve que H est un hyperplan de E.

Supposons maintenant ψ forme linéaire sur E, nulle sur H, c'est-à-dire que $H \subset \operatorname{Ker}\psi$. H étant un hyperplan et $\operatorname{Ker}\psi$ un sous-espace vectoriel de E, deux cas se présentent :

- soit $\operatorname{Ker}\psi = E$; alors $\psi = 0 = 0.\varphi$ est bien colinéaire à φ ;
- soit $\operatorname{Ker}\psi = H = \operatorname{Ker}\varphi$; je construis comme ci-dessus un vecteur a de E tel que $\varphi(a) = 1$ et j'observe la forme linéaire $\delta = \psi - \psi(a).\varphi$; il est clair que $H \subset \operatorname{Ker}\delta$ et que $a \in \operatorname{Ker}\delta$; ainsi $\operatorname{Ker}\delta$ contient H et $\mathbb{K}.a$, donc leur somme qui n'est autre que E tout entier, donc $\delta = 0$. Ainsi $\psi = \psi(a).\varphi$ est là encore colinéaire à φ.

2) Soit H un hyperplan de E et $a \in E \backslash H$; j'ai vu au § **3)** que $E = H \oplus \mathbb{K}.a$; soient alors u l'application linéaire de E dans $\mathbb{K}.a$ qui à tout x de E associe sa projection sur $\mathbb{K}.a$ parallèlement à H, θ l'isomorphisme de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}.a$ qui à tout scalaire λ associe $\lambda.a$. Soit enfin $\varphi = \theta^{-1} \circ u$; φ est une forme linéaire sur E et, pour tout x de E : $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow u(x) = 0 \Leftrightarrow x \in H$.
Autrement dit, $\operatorname{Ker}\varphi = H$.
Supposons pour finir que φ est une forme linéaire sur E telle que $H = \operatorname{Ker}\varphi$. Il est alors immédiat que toute forme linéaire ψ de la forme $\lambda.\varphi$, avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$, vérifie $\operatorname{Ker}\psi = \operatorname{Ker}\varphi = H$. Réciproquement, soit ψ forme linéaire sur E de noyau H ; d'après le 1) *in fine*, ψ est de la forme $\lambda.\varphi$, où λ est un scalaire, nécessairement non nul (puisque $\operatorname{Ker}\psi \neq E$). Cela achève la démonstration.

NB : si φ est une forme linéaire non nulle sur E et $H = \operatorname{Ker}\varphi$, alors φ est surjective (son image est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}$ différent de $\{0\}$!) et ses *lignes de niveau* (les ensembles d'équation $\varphi(x) = k$, $k \in \mathbb{K}$) sont les *hyperplans affines* de E de direction H.

2) Cas où E est de dimension finie non nulle n

Dans E de dimension finie $n > 0$, le théorème de la base incomplète montre qu'il existe des hyperplans (un seul si $n = 1$!) et donc des formes linéaires non nulles (on peut aussi en définir directement par l'image d'une base...).
Les hyperplans de E sont exactement les sous-espaces vectoriels de E de dimension $n - 1$.

<u>*Équations (cartésiennes) d'un hyperplan dans une base*</u> :

Étant donnée une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E, toute forme linéaire φ sur E est définie par son expression analytique dans $\mathcal{B}$: si $x = \sum_{k=1}^{n} x_k.e_k$, $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$ (où a_k n'est autre que le scalaire $\varphi(e_k)$).

Si $\varphi \neq 0$, l'hyperplan $\operatorname{Ker}\varphi$ admet pour *équation cartésienne dans la base* $\mathcal{B}$: $\sum_{k=1}^{n} a_k x_k = 0$.

Réciproquement, si $(a_1, \ldots, a_n)$ est une famille de n scalaires non tous nuls, $\left\{ \sum_{k=1}^{n} x_k.e_k \in E \ / \ \sum_{k=1}^{n} a_k x_k = 0 \right\}$ est un hyperplan de E, appelé *l'hyperplan d'équation* $\sum_{k=1}^{n} a_k x_k = 0$ *dans la base* $\mathcal{B}$.

Dans les deux cas, l'hyperplan considéré admet une infinité d'équations dans la base $\mathcal{B}$, mais elles se déduisent l'une de l'autre par multiplication par un scalaire non nul.

VI - Matrices semblables – Notion de trace

1) Changement de base pour un endomorphisme – Matrices semblables

Théorème : soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E, $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Si A est la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ et A' la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$, alors $A' = P^{-1}AP$.

Définition : deux matrices carrées A et B d'ordre n sont *semblables* si et seulement si :

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{K}) \quad B = P^{-1}AP.$$

i.e. si et seulement si A et B représentent un même endomorphisme dans deux bases d'un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

NB : la relation “est semblable à” est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, mais la description des classes d'équivalence est non triviale. Nous ne verrons que des conditions nécessaires : si A et B sont semblables, alors elles ont le même rang, le même déterminant, etc.

2) Trace d'une matrice carrée

Définition : soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; on appelle *trace de* A la somme des éléments de la diagonale principale de A :

$$\operatorname{Tr} A = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k}$$

Propriétés : **1)** L'application Tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2) $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \quad \operatorname{Tr}(BA) = \operatorname{Tr}(AB)$.
3) $\forall P \in GL_n(\mathbb{K}) \quad \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \operatorname{Tr}\left(P^{-1}AP\right) = \operatorname{Tr} A$
(deux matrices semblables ont même trace).

<u>*Dém.*</u> **1)** Vérification immédiate.

2) Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$; j'ai

$$\operatorname{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,i} \right) \quad \text{et} \quad \operatorname{Tr}(BA) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} b_{i,j} a_{j,i} \right)$$

d'où le résultat par réindexation.

3) D'après **2)** :

$$\operatorname{Tr}\left(P^{-1}AP\right) = \operatorname{Tr}\left(P^{-1}(AP)\right) = \operatorname{Tr}\left((AP)P^{-1}\right) = \operatorname{Tr}\left(APP^{-1}\right) = \operatorname{Tr} A\ .$$

Attention ! En général $\operatorname{Tr}(AB) \neq (\operatorname{Tr} A)(\operatorname{Tr} B)$; $\operatorname{Tr}(ABC) \neq \operatorname{Tr}(BAC)$.

NB : dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le calcul précédent montre que, avec les mêmes notations,

$$\operatorname{Tr}\left(A^tB\right) = \operatorname{Tr}\left({}^tAB\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{i,j}$$

qui n'est autre que *le produit scalaire canonique* de A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On vérifie que, pour ce produit scalaire, le sous-espace des matrices symétriques et celui des matrices antisymétriques sont supplémentaires orthogonaux.

3) Trace d'un endomorphisme

Théorème et définition : soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie ; la trace de la matrice de u dans une base de E ne dépend pas du choix de cette base, on l'appelle *trace de* u, notée $\operatorname{Tr} u$.

Dém. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont deux bases de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$; si A est la matrice de u dans $\mathcal{B}$, alors la matrice de u dans $\mathcal{C}$ est $P^{-1}AP$, qui a la même trace que A d'après le § **1)**.

Propriétés : **1)** L'application Tr est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$.
2) $\forall (u,v) \in \mathcal{L}(E)^2 \quad \operatorname{Tr}(v \circ u) = \operatorname{Tr}(u \circ v)$.
3) Le rang d'un projecteur est égal à sa trace.

Dém. **1)** et **2)** découlent du paragraphe précédent.

3) Soit p un projecteur de rang r ; dans une base adaptée à la décomposition $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$, p admet pour matrice $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, d'où $\operatorname{Tr} p = r = \operatorname{rg} p$.

VII - Compléments sur les déterminants

1) Matrices définies par blocs

Étant données quatre matrices $A_{1,1} \in \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{K})$, $A_{2,1} \in \mathcal{M}_{n_2,n_1}(\mathbb{K})$, $A_{1,2} \in \mathcal{M}_{n_1,n_2}(\mathbb{K})$, $A_{2,2} \in \mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{K})$, on identifie le “tableau” $\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix}$ à une matrice de $\mathcal{M}_{n_1+n_2}(\mathbb{K})$, dite *matrice définie par blocs*.
$A_{1,1}$ et $A_{2,2}$ sont les *blocs diagonaux* (carrés par hypothèse, mais pas nécessairement de même taille).
Si $A_{2,1}$ (*resp.* $A_{1,2}$) est nul, la matrice est dite *triangulaire supérieure* (resp. *inférieure*) *par blocs*.
Si les deux blocs $A_{2,1}$ et $A_{1,2}$ sont nuls, la matrice est dite *diagonale par blocs*.

La transposée d'une matrice définie par blocs s'écrit naturellement, sans oublier de transposer les blocs !

La multiplication par un scalaire d'une matrice définie par blocs est naturelle.

L'addition de deux matrices A et B définies par blocs est naturelle également, si les blocs sont **de mêmes tailles** (c'est-à-dire que les deux blocs $A_{i,j}$ et $B_{i,j}$ sont de même taille pour tout couple (i,j) donné, mais il peut y avoir des blocs de tailles différentes selon les couples (i,j) !).

La multiplication de deux matrices définies par blocs, **avec des blocs diagonaux de même taille** (c'est-à-dire que les deux blocs $A_{i,i}$ et $B_{i,i}$ sont carrés de même taille pour tout i donné), s'effectue selon l'algorithme habituel, en traitant les blocs comme des scalaires (en laissant bien à gauche les blocs de la matrice de gauche !). Ainsi, si $A_{1,1}$ et $B_{1,1}$ sont dans $\mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{K})$, $A_{2,1}$ et $B_{2,1}$ dans $\mathcal{M}_{n_2,n_1}(\mathbb{K})$, $A_{1,2}$ et $B_{1,2}$ dans$\mathcal{M}_{n_1,n_2}(\mathbb{K})$, $A_{2,2}$ et $B_{2,2}\mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{K})$, on a

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1}B_{1,1} + A_{1,2}B_{2,1} & A_{1,1}B_{1,2} + A_{1,2}B_{2,2} \\ A_{2,1}B_{1,1} + A_{2,2}B_{2,1} & A_{2,1}B_{1,2} + A_{2,2}B_{2,2} \end{pmatrix}.$$

On obtient une matrice définie par blocs, avec des blocs de mêmes tailles que ceux des deux matrices que l'on a multipliées. Notamment, les puissances positives d'une matrice définie par blocs s'écrivent par blocs de la même taille que ceux de la matrice initiale.

Toutes ces définitions et propriétés se généralisent par récurrence à des matrices comportant un plus grand nombre de blocs.

2) Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs

Rappel : le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des coefficients de la diagonale.

Généralisation : le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des déterminants des blocs diagonaux (qui sont carrés par définition).
Corollaire : une matrice triangulaire par blocs est inversible si et seulement si tous ses blocs diagonaux sont inversibles.

3) Exemples de déterminants

a) Matrices $aI + bU$

Soit U la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients valent 1 et I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ on a

$$\det(aI + bU) = (a + nb)\, a^{n-1}.$$

b) Matrices tridiagonales

Pour a, b, c dans $\mathbb{K}$, la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a & c & 0 & \cdots & 0 \\ b & a & c & \ddots & \vdots \\ 0 & b & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & c \\ 0 & \cdots & 0 & b & a \end{vmatrix} \quad \text{(déterminant d'ordre } n\text{)}$$

vérifie la relation de récurrence linéaire double

$$\forall n \geq 3 \quad \Delta_n = a\Delta_{n-1} - bc\Delta_{n-2} \quad \text{(à retrouver par deux développements consécutifs...).}$$

On en déduit l'expression de Δ_n en fonction de n grâce à l'équation caractéristique associée, sachant que

$$\Delta_1 = a \quad \text{et} \quad \Delta_2 = a^2 - bc.$$

On peut remarquer (habilement) que la relation ci-dessus reste vraie pour $n = 2$ en posant $\Delta_0 = 1$, ce qui peut simplifier les calculs...

c) Produit tensoriel

Pour $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit par blocs la matrice

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} aB & cB \\ bB & dB \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K}). \text{ On a } \det(A \otimes B) = \det(A)^n \det(B)^2.$$

4) Déterminant de Vandermonde

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on définit la fonction V_{n+1} de $\mathbb{K}^{n+1}$ dans $\mathbb{K}$ par

$$\forall (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n \quad V_{n+1}(a_0, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} \left(= \det\left(a_{i-1}^{j-1}\right)_{1\leq i,j\leq n+1} \right)$$

On peut montrer que :

$$\forall (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \quad V_{n+1}(a_0, \ldots, a_n) = \prod_{0\leq i<j\leq n} (a_j - a_i).$$

Noter que l'on pouvait prévoir que ce déterminant est non nul si et seulement si les a_j sont distincts deux à deux ; en effet c'est le déterminant de la matrice, dans les bases canoniques, de l'application linéaire

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}^{n+1} \\ & P & \mapsto & \big(P(a_0), \ldots, P(a_n)\big) \end{array}$$

liée aux polynômes de Lagrange évoqués ci-après.

Interpolation de Lagrange (hors programme mais **très** classique)

Soient $a_0, \dots, a_n$ dans $\mathbb{K}$, distincts deux à deux.

L'application $\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \mapsto & \big(P(a_0), \dots, P(a_n)\big) \end{array}$ est un isomorphisme.

En effet ϕ est linéaire et injective (car un polynôme de degré au plus n admettant $n+1$ racines distinctes est nécessairement nul), entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension.

On en déduit en particulier, pour tout $b = (b_0, \dots, b_n)$ de $\mathbb{K}^{n+1}$, l'existence et l'unicité de P dans $\mathbb{K}_n[X]$ tel que

$$\forall j \in \{0, \dots, n\} \quad P(a_j) = b_j.$$

Pour expliciter ce *polynôme d'interpolation* P, il suffit de remarquer que les polynômes L_i définis par

$$\forall i \in \{0, \dots, n\} \quad L_i = \prod_{k \neq i} \frac{X - a_k}{a_i - a_k}.$$

vérifient :

$$\forall (i,j) \in \{0, \dots, n\}^2 \quad L_i(a_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad \textit{(symbole de Kronecker).} \tag{1}$$

On en déduit par unicité de P que

$$P = \sum_{i=0}^{n} b_i . L_i .$$

NB : les relations (1) signifient que les L_i sont les antécédents par ϕ des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$. Si besoin, on peut retrouver l'expression de L_i à partir de ces relations : L_i est de degré au plus n, admet les n racines distinctes $(a_k)_{k \neq i}$ et $L_i(a_i) = 1$, cette dernière relation permettant de déterminer le coefficient dominant de L_i.

VIII - Applications des déterminants

1) Orientation d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Théorème et définition : soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E ; on dit que $\mathcal{B}'$ *est de même orientation que* $\mathcal{B}$ si et seulement si la matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ a un déterminant strictement positif.
La relation ainsi définie sur l'ensemble des bases de E est une relation d'équivalence, pour laquelle il existe exactement **deux** classes d'équivalence.
Orienter E, c'est choisir l'une de ces deux classes, dont les éléments sont appelés *bases directes*, les autres étant les *bases indirectes* (ou *rétrogrades*).

Dém. Tout vient des propriétés des matrices de passages... Rappelons que, si $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ sont trois bases de E, alors on a la relation

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}$$

En effet, si X, X', X'' sont les vecteurs colonnes des coordonnées d'un même vecteur x de E respectivement dans $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}''$,

$$X = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} X' = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \left(P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''} X''\right) = \left(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}\right) X''.$$

On en déduit le résultat en prenant pour x les vecteurs de $\mathcal{B}''$, ce qui donne les colonnes de $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}$.

- La relation est réflexive car $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = I_n$ est de déterminant 1 et $1 > 0$!
- La relation est symétrique car $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1}$, donc les déterminants de $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ et $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ sont de même signe puisque ce sont deux réels inverses l'un de l'autre.
- La relation est transitive car le déterminant du produit de deux matrices de déterminant positif est positif...

Nous avons donc bien une relation d'équivalence.

- Il y a au moins deux classes d'équivalences, car si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors $\mathcal{B}' = (-e_1, \dots, e_n)$ n'est pas de même orientation que $\mathcal{B}$, puisque $\det P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = -1 < 0$.

- Il n'y a que deux classes d'équivalence, car si $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ sont comme ci-dessus et si $\mathcal{B}''$ est un troisième base de E, alors
$$\det P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = -\det P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}$$
donc l'un de ces deux déterminants est positif, c'est-à-dire que $\mathcal{B}''$ est soit dans la classe de $\mathcal{B}$, soit dans la classe de $\mathcal{B}'$.

NB : le choix de l'une des deux orientations est purement conventionnel. Sur une droite, il s'agit intuitivement de "mettre une flèche" d'un côté ou de l'autre, pour définir un *axe*. En dimension 2 ou 3, il y a des orientations "usuelles" : sens trigonométrique dans le plan, orientation testée par diverses méthodes (trois doigts, bonhomme d'Ampère, tire-bouchon...) en dimension 3.

Propriété : soit $u \in GL(E)$; la base $\mathcal{B}' = \big(u(e_1), \dots, u(e_n)\big)$ est de même orientation que $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ si et seulement si $\det u > 0$.

Dém. Il suffit de remarquer que, si A désigne la matrice de u dans $\mathcal{B}$, alors
$$P_{\mathcal{B},B'} = M_{\mathcal{B}}\big(u(e_1), \dots, u(e_n)\big) = A$$
et donc
$$\det P_{\mathcal{B},B'} = \det A = \det u,$$
d'où le résultat !

2) Comatrice *(hors programme mais classique)*

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; on appelle *comatrice de* M la matrice des cofacteurs des éléments de M :
$$\operatorname{Com} M = (A_{i,j})_{1\le i,j\le n} .$$
On a alors les relations :
$$M \times {}^t(\operatorname{Com} M) = {}^t(\operatorname{Com} M) \times M = (\det M).I_n$$
donc, si $\det M \neq 0$:
$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \cdot {}^t(\operatorname{Com} M).$$

3) Formules de Cramer *(hors programme mais classiques)*

Soit $(S) : MX = B$ un système linéaire, où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ et $M \in GL_n(\mathbb{K})$.

Un tel système est dit *système de Cramer* ; il admet pour unique solution $X = M^{-1}B$ quel que soit B.

La solution de (S) est donnée par :
$$\forall j \in \mathbb{N}_n \quad x_j = \frac{\det M_j}{\det M} \text{ \textit{(formules de Cramer)}}$$
où M_j est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ obtenue en remplaçant dans M la colonne j par le second membre B.

Dém. Soient $C_1, \dots, C_n$ les vecteurs colonnes de M et $(x_1, \dots, x_n)$ la solution de (S), ce qui signifie que $B = \sum_{j=1}^{n} x_j.C_j$; j'obtiens alors, par définition de M_j et par linéarité par rapport à la j-ième variable, en notant $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$:
$$\begin{aligned}
\det(M_j) &= \det_{\mathcal{B}}(C_1, \dots, C_{j-1}, B, C_{j+1}, \dots, C_n) \\
&= \det_{\mathcal{B}}\left(C_1, \dots, C_{j-1}, \sum_{k=1}^{n} x_k.C_k, C_{j+1}, \dots, C_n\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k.\det_{\mathcal{B}}(C_1, \dots, C_{j-1}, C_k, C_{j+1}, \dots, C_n) \\
&= x_j.\det(M)
\end{aligned}$$
car pour $k \neq j$ il y a deux vecteurs identiques dans la famille. Le résultat en découle.

NB : ce résultat n'est pas très efficace en pratique, mais il a un intérêt théorique, faisant apparaître l'expression des solutions sous forme de "fonctions rationnelles"...