Convexité (complément hors programme)

Les fonctions étudiées dans ce paragraphe sont définies sur un intervalle I (non réduit à un point) de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1) Définitions

- f est *convexe sur* I si et seulement si
$$\forall (x,y) \in I^2 \quad \forall t \in [0,1] \quad f\big((1-t).x + t.y\big) \leq (1-t).f(x) + t.f(y).$$
- f est *concave sur* I si et seulement si $-f$ est convexe.
- Le *graphe* de f est $\Gamma = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = f(x)\big\}$. On appelle *arc de* Γ toute partie de Γ de la forme $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \in [a,b] \text{ et } y = f(x)\big\}$ où $(a,b) \in I^2$; *la corde* associée à un tel arc est le segment joignant les points $\big(a, f(a)\big)$ et $\big(b, f(b)\big)$.
- L'*épigraphe* de f est $\mathcal{E} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y \geq f(x)\big\}$.

Propriété : si f est convexe sur I, si $a_1, \ldots, a_n$ sont des points de I et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ dans $\mathbb{R}^+$ tels que $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, alors :
$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k.a_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.f(a_k).$$

2) Premières caractérisations

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) f est convexe sur I.

2) Tout arc du graphe Γ de f est situé sous sa corde et le reste du graphe est au-dessus.

3) L'épigraphe de f est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

4) Pour tout a de I, la fonction $\phi_a : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

3) Caractérisation des fonctions convexes de classe $\mathcal{C}^1$

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) f est convexe sur I.

2) f' est croissante sur I.

3) Le graphe Γ de f est au-dessus de chacune de ses tangentes, c'est-à-dire
$$\forall a \in I \quad \forall x \in I \quad f(x) \geq f(a) + (x-a)\,f'(a).$$

NB : si f est deux fois dérivable, elle est convexe si et seulement si f'' est positive.

4) Exemples classiques

La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$. Notamment (cf. la tangente en $(0,1)$)
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad e^t \geq 1 + t.$$
La fonction logarithme népérien est concave sur $\mathbb{R}^{+*}$. Notamment (cf. la tangente en $(1,0)$)
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad \ln x \leq x - 1.$$
La fonction sinus est concave sur $[0,\pi]$. Notamment (cf. la tangente en $(0,0)$ et la corde associée à $[0,\pi/2]$)
$$\forall x \in [0,\pi/2] \quad \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x.$$