Équation différentielle vérifiée par le wronskien

1) Résultat préliminaire

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ fixée, $F = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{B}$ la base canonique de F. On a

$$\forall (C_1, \ldots, C_n) \in F^n \quad \sum_{j=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(C_1, \ldots, C_{j-1}, AC_j, C_{j+1}, \ldots, C_n) = \mathrm{Tr}(A) . \det_{\mathcal{B}}(C_1, \ldots, C_n)$$

Dém. Soit ϕ l'application de F^n dans $\mathbb{K}$ qui à $(C_1, \ldots, C_n)$ associe

$$\phi(C_1, \ldots, C_n) = \sum_{j=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(C_1, \ldots, C_{j-1}, AC_j, C_{j+1}, \ldots, C_n).$$

J'utilise la caractérisation de la fonction det dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: il existe une unique application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

1) f est linéaire par rapport à chacune des colonnes de sa variable ;

2) f est *antisymétrique* par rapport aux colonnes de sa variable, c'est-à-dire que si M' se déduit de M par transposition de deux colonnes, $f(M') = -f(M)$;

3) $f(I_n) = 1$.

Par définition, $f(M)$ est le déterminant de M, noté $\det M$.

Je définis $g : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ par $g(M) = \phi(C_1, \ldots, C_n)$ où $C_1, \ldots, C_n$ sont les vecteurs colonnes de M.

1) Il est clair que ϕ est n-linéaire, donc g est linéaire par rapport à chacune des colonnes de sa variable !

2) Pour montrer que ϕ (donc g) est antisymétrique, je montre qu'elle est *alternée*, c'est-à-dire que si deux des vecteurs C_j sont égaux, alors $\phi(C_1, \ldots, C_n) = 0$. Je suppose donc $C_k = C_\ell$, avec par exemple $k < \ell$. Dans la somme qui définit $\phi(C_1, \ldots, C_n)$, tous les termes pour $j \neq k$ et $j \neq \ell$ sont nuls, puisque parmi les vecteurs figurent deux vecteurs identiques, à savoir C_k et C_ℓ. Il ne reste donc que les deux termes pour $j = k$ et $j = \ell$, qui s'écrivent, en ne faisant figurer que les vecteurs aux places k et ℓ (tous les autres étant les C_j à leur place) et sachant que $C_\ell = C_k$:

$$\phi(C_1, \ldots, C_n) = \det_{\mathcal{B}}(\ldots, AC_k, \ldots, C_k, \ldots) + \det_{\mathcal{B}}(\ldots, C_k, \ldots, AC_k, \ldots) = 0$$

puisque $\det_{\mathcal{B}}$ est antisymétrique ! On en déduit classiquement que ϕ est antisymétrique, en développant $0 = \phi(\ldots, C_k + C_\ell, \ldots, C_k + C_\ell, \ldots)$, où $C_k + C_\ell$ a été recopié aux places d'indices k et ℓ.

3) *Calcul de $g(I_n)$* : le terme d'indice j dans la somme définissant $g(I_n)$ est le déterminant de la matrice dont toutes les colonnes sont celle de I_n, sauf la j-ième qui est celle de A. En développant par rapport à la j-ième ligne, je trouve que ce déterminant vaut $a_{j,j}$, d'où finalement $g(I_n) = \mathrm{Tr}(A)$.

Donc, si $\mathrm{Tr}(A) = 1$, j'en déduis que $\phi = \det_{\mathcal{B}}$.

Si $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$, par linéarité en divisant tout par $\mathrm{Tr}(A)$, j'obtiens $\dfrac{1}{\mathrm{Tr}(A)} \cdot \phi = \det_{\mathcal{B}}$, d'où le résultat souhaité.

Reste le cas où $\mathrm{Tr}(A) = 0$. Je peux alors conclure par densité, puisque les deux expressions considérées sont des fonctions polynomiales de A, donc continues, et qu'il est facile de construire une suite (A_p) de matrices de traces non nulles de limite A (avec par exemple $A_p = A + \dfrac{1}{p+1} \cdot I_n$).

Il n'y a plus qu'à appliquer le résultat précédent aux A_p puis à passer à la limite !

NB : ce résultat reste valable avec n'importe quelle base $\mathcal{B}$ de F, puisqu'il suffit pour changer de base de tout multiplier par le déterminant de la matrice de passage.

2) Application au wronskien

Soit (H) $X' = A(t)\,X$ un système différentiel linéaire homogène, où $A : I \mapsto \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est continue sur l'intervalle I.
Je suppose que $(e_1, \ldots, e_n)$ est un système fondamental de solutions de (H) sur I, c'est-à-dire une base de l'espace $\mathcal{S}_I(H)$ et je considère une base $\mathcal{B}$ de $F = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
Comme les e_j sont dérivables sur I et que $\det_{\mathcal{B}}$ est n-linéaire, par composition le *wronskien*

$$W : t \mapsto \det_{\mathcal{B}}\big(e_1(t), \ldots, e_n(t)\big)$$

et dérivable sur I avec

$$\begin{aligned} \forall t \in I \quad W'(t) &= \sum_{j=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}\big(e_1(t), \ldots, e_{j-1}(t), e'_j(t), e_{j+1}(t), \ldots, e_n(t)\big) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}\big(e_1(t), \ldots, e_{j-1}(t), A(t)\,e_j(t), e_{j+1}(t), \ldots, e_n(t)\big) \end{aligned}$$

en tenant compte du fait que e_j est solution de (H).

Pour chaque valeur de t je peux appliquer le résultat du **1)** qui donne :

$$\boxed{\forall t \in I \quad W'(t) = \operatorname{Tr} A(t) \cdot W(t).}$$

On retrouve ainsi le fait que $W(t)$ est, soit toujours nul, soit jamais nul, puisque la fonction W est solution d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1 !