Intégrales dépendant d'un paramètres : démonstrations

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$.

1) Continuité sous le signe $\int$

Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$ telle que :

- pour tout t de I, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A ;
- pour tout x de A, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- il existe φ, continue par morceaux et intégrable sur I, vérifiant :

$$\forall (x,t) \in A \times I \quad |f(x,t)| \leq \varphi(t) \quad \textit{(hypothèse de domination).}$$

Alors pour tout x de A, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I et
$g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.

Dém. Déjà grâce à l'hypothèse de domination g est définie sur A. Pour la continuité de g en a (fixé dans A), j'utilise la caractérisation séquentielle. Soit (x_n) une suite d'éléments de A convergeant vers a et (f_n) la suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{R} \quad \forall t \in I \quad f_n(t) = f(x_n, t)\,.$$

Par continuité de $x \mapsto f(x,t)$, (f_n) CVS sur I vers la fonction $t \mapsto f(a,t)$, qui est continue par morceaux sur I.
Alors l'hypothèse de domination de l'énoncé permet d'appliquer le théorème de convergence dominée, qui donne notamment

$$\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_I f(a,t)\,\mathrm{d}t \quad \text{autrement dit} \quad g(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g(a)\,.$$

Cela pour toute suite (x_n) d'éléments de A convergeant vers a. Donc g est continue en a, cela pour tout a de A, **cqfd.**

2) Dérivation sous le signe $\int$ – Formule de Leibniz

Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$ telle que :

- pour tout t de I, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A ;
- pour tout x de A, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I ;
- pour tout x de A, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- il existe ψ, continue par morceaux et intégrable sur I, vérifiant :

$$\forall (x,t) \in A \times I \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \psi(t) \quad \textit{(hypothèse de domination).}$$

Alors $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur A avec :

$$\forall x \in A \quad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t \quad \textit{(formule de Leibniz).}$$

Dém. D'après les hypothèses, g est définie sur A. Je fixe $a \in A$ et je pose :

$$\forall (x,t) \in A \times I \quad h(x,t) = \frac{f(x,t) - f(a,t)}{x-a} \quad \text{si } x \neq a \quad \text{et} \quad h(a,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)$$

de sorte que

$$\forall x \in A \quad x \neq a \Rightarrow \frac{g(x) - g(a)}{x-a} = \int_I h(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Il s'agit donc de montrer que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_I h(x,t)\,\mathrm{d}t$ est continue en a, or les hypothèses du théorème de continuité sous le signe $\int$ sont satisfaites (utiliser l'inégalité des accroissements finis pour montrer que $|h(x,t)|$ est dominé par $\psi(t)$). Il en résulte que

$$\frac{g(x)-g(a)}{x-a} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)\,\mathrm{d}t$$

autrement dit g est dérivable en a et $g'(a) = \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)\,\mathrm{d}t$, cela pour tout a de A.

Reste à montrer que g' est continue mais là encore les hypothèses du théorème de continuité sous le signe $\int$ sont vérifiées, **cqfd.**

3) Extension au cas $\mathcal{C}^k$

Dans le cas où les dérivées successives ne se dominent pas facilement, on dispose du théorème suivant où il suffit de dominer la dernière dérivée.

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $f : A \times I \to \mathbb{K}$ telle que :

- pour tout t de I, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur A ;
- pour tout x de A et tout j de $[\![0, k-1]\!]$ la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I ;
- pour tout x de A, $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- il existe ψ_k, continue par morceaux et intégrable sur I, vérifiant :

$$\forall (x,t) \in A \times I \quad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \psi_k(t) \quad \textit{(hypothèse de domination).}$$

Alors $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et de classe $\mathcal{C}^k$ sur A avec :

$$\forall j \in [\![1,k]\!] \quad \forall x \in A \quad g^{(j)}(x) = \int_I \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\,\mathrm{d}t \quad \textit{(formule de Leibniz).}$$

Dém. Par récurrence sur k. On peut supposer que A est un segment $[a,b]$, où $a < b$ (ce qui permettra de démontrer que g est $\mathcal{C}^k$ sur tout segment inclus dans A...).

Au rang $k = 1$, il s'agit du théorème du §**2**.

Hypothèse de récurrence : soit $k \geq 1$ tel que le théorème soit vrai au rang k.

Je considère alors une fonction f vérifiant les hypothèses du théorème au rang $k+1$.

Je montre que $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$ est dominée grâce à l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall x \in [a,b] \quad \forall t \in I \quad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \psi_k(t) = \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a,t)\right| + (b-a)\,\psi_{k+1}(t)$$

et la fonction ψ_k est intégrable sur I comme somme de deux fonctions intégrables.

Je peux alors appliquer le théorème au rang k (hypothèse de récurrence) à la fonction f : j'en déduis que g est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a,b]$ et que ses dérivées jusqu'à l'ordre k sont données par dérivation sous le signe $\int$.

Il n'y a plus qu'à appliquer le théorème à l'ordre 1 à la fonction $g^{(k)}$!

Il en résulte que le théorème est vrai au rang $k+1$, **cqfd**.