Suites de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$: démonstration

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et k est un entier, $k \geq 1$.

Théorème : soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{K})$ telle que :

* pour tout j tel que $0 \leq j \leq k-1$, $\left(f_n^{(j)}\right)$ converge simplement sur I vers g_j ;
* $\left(f_n^{(k)}\right)$ converge **uniformément** sur I vers g_k ;

alors $f = g_0$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et : $\forall j \in [\![1, k]\!] \quad f^{(j)} = g_j$, autrement dit

$$\forall j \in [\![1, k]\!] \quad \forall x \in I \quad f^{(j)}(x) = \lim_{n\to\infty} f_n^{(j)}(x).$$

<u>*Dém.*</u> Par récurrence sur k.
Au rang $k = 1$, il s'agit du théorème démontré en classe.
<u>*Hypothèse de récurrence*</u> : soit $k \geq 1$ tel que le théorème soit vrai.

Je considère alors (f_n), suite de fonctions de $\mathcal{C}^{k+1}(I, \mathbb{K})$ telle que :

- pour tout j tel que $0 \leq j \leq k$, $\left(f_n^{(j)}\right)$ converge simplement sur I vers g_j ;
- $\left(f_n^{(k+1)}\right)$ converge **uniformément** sur I vers g_{k+1}.

Déjà, le théorème au rang 1 appliqué à $\left(f_n^{(k)}\right)$ montre que g_k est $\mathcal{C}^1$ sur I et que $g_k' = g_{k+1}$.
Je considère alors un segment $J = [a, b]$ contenu dans I et je montre que je peux appliquer l'hypothèse de récurrence sur J. Il suffit pour cela d'établir la convergence uniforme sur J de $\left(f_n^{(k)}\right)$ (toutes les autres hypothèses sont satisfaites *a fortiori* !).
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in J$, j'ai grâce au théorème fondamental de l'intégration et à l'inégalité de la moyenne

$$\begin{aligned} \left|f_n^{(k)}(x) - g_k(t)\right| &= \left|f_n^{(k)}(a) + \int_a^x f_n^{(k+1)}(t)\,\mathrm{d}t - g_k(a) - \int_a^x g_{k+1}(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leq \left|f_n^{(k)}(a) - g_k(a)\right| + |b-a| \sup_J \left|f_n^{(k+1)} - g_{k+1}\right| \end{aligned}$$

et ce dernier majorant est indépendant de x et tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini (grâce à la convergence uniforme de $\left(f_n^{(k+1)}\right)$ vers g_{k+1}, sur I donc sur J puisque $J \subset I$).
Noter que le choix de se placer sur le segment J permet de majorer $|x-a|$ par la constante $|b-a|$.
L'hypothèse de récurrence m'indique alors que $f = g_0$ est $\mathcal{C}^k$ sur J, cela pour tout segment J inclus dans I, donc $\mathcal{C}^k$ sur I, avec $f^{(j)} = g_j$ pour tout j de $[\![1, k]\!]$.
Or nous avons déjà vu que g_k est $\mathcal{C}^1$ sur I avec $g_k' = g_{k+1}$.
Il en résulte que le théorème est vrai au rang $k+1$, ce qui achève la démonstration.