Démonstrations complémentaires dans les espaces vectoriels normés

II - Topologie d'un espace vectoriel normé

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, x un point de E et A une partie de E.

2) Intérieur, adhérence, frontière

- x est *intérieur à* A si et seulement si : $\exists r > 0 \quad B(x,r) \subset A$ (*i.e.* A est un voisinage de x)
- *l'intérieur de* A, noté $\mathring{A}$, est la réunion des ouverts inclus dans A ; c'est le plus grand ouvert de E inclus dans A ; c'est aussi l'ensemble des points intérieurs à A.

<u>*Dém.*</u> Soit Ω l'ensemble des ouverts de E inclus dans A ; par définition $\mathring{A} = \bigcup\limits_{\mathcal{O} \in \Omega} \mathcal{O}$.

$\mathring{A}$ est un ouvert de E (en tant que réunion d'une famille d'ouverts), inclus dans A par construction et il contient tout ouvert $\mathcal{O}$ inclus dans A par définition ! Par conséquent,

$$\boxed{\mathring{A} \text{ est le plus grand ouvert de } E \text{ inclus dans } A.}$$

Notons $\mathcal{I}$ l'ensemble des points intérieurs à A. Il s'agit de montrer que $\mathcal{I} = \mathring{A}$.

<u>$\mathcal{I} \subset \mathring{A}$</u> : soit x un point intérieur à A ; je dispose de $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset A$, or $B(x,r)$ est un ouvert de E, donc $B(x,r) \in \Omega$, d'où $B(x,r) \subset \mathring{A}$ par définition, or $x \in B(x,r)$ donc $x \in \mathring{A}$.

<u>$\mathring{A} \subset \mathcal{I}$</u> : soit $x \in \mathring{A}$; par définition je dispose de $\mathcal{O}$, ouvert de E inclus dans A, tel que $x \in \mathcal{O}$. Comme $\mathcal{O}$ est ouvert, je dispose de $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset \mathcal{O}$; or $\mathcal{O} \subset A$ donc par transitivité $B(x,r) \subset A$ et x est bien intérieur à A.

En conclusion

$$\boxed{\mathring{A} \text{ est l'ensemble des points intérieurs à } A.}$$

- x est *adhérent à* A si et seulement si : $\forall r > 0 \quad B(x,r) \cap A \neq \emptyset$; en particulier tout point de A est adhérent à A, même si cette notion n'est "intéressante" que pour un point n'appartenant pas à A
- *l'adhérence de* A, notée $\bar{A}$, est l'intersection des fermés contenant A ; c'est le plus petit fermé de E contenant A ; c'est aussi l'ensemble des points adhérents à A.

Notons $C = E \backslash A$ le complémentaire de A et remarquons que

$$B(x,r) \cap A = \emptyset \Leftrightarrow B(x,r) \subset C$$

donc que "x est adhérent à A" équivaut à "x n'est pas intérieur à C". Autrement dit, l'ensemble des points adhérents à A est le complémentaire de $\mathring{C}$. Or les ouverts inclus dans C sont les complémentaires des fermés contenant A, donc — en vertu des lois de De Morgan — $\mathring{C}$ est le complémentaire de $\bar{A}$. Finalement $\bar{A}$ est bien l'ensemble des points adhérents à A. Par ailleurs on montre comme ci-dessus que c'est le plus petit fermé de E contenant A (ce qui découle aussi des lois de De Morgan...).

Propriétés : pour toute partie A de E, on a $\mathring{A} \subset A \subset \bar{A}$, $E \backslash \mathring{A} = \overline{E \backslash A}$, $E \backslash \bar{A} = \overbrace{E \backslash A}^{\circ}$;
A est ouvert si et seulement si $A = \mathring{A}$; A est fermé si et seulement si $A = \bar{A}$.

<u>*Dém.*</u> Les inclusions $\mathring{A} \subset A \subset \bar{A}$ découlent directement des définitions. En notant $C = E \backslash A$, nous avons montré ci-dessus que $\mathring{C}$ est le complémentaire de $\bar{A}$, c'est-à-dire que $E \backslash \bar{A} = \overbrace{E \backslash A}^{\circ}$.

Cela étant vrai pour toute partie A de E, je peux l'appliquer à C : $E \backslash \bar{C} = \mathring{A}$, d'où $\overline{E \backslash A} = E \backslash \mathring{A}$.

Si A est ouvert, alors A est évidemment le plus grand des ouverts de E inclus dans A ! Donc $A = \mathring{A}$. Réciproquement, si $A = \mathring{A}$, alors A est ouvert puisque $\mathring{A}$ est ouvert par construction.

Même style de justifications pour "A est fermé si et seulement si $A = \bar{A}$".

IV - Compacité *(complément hors programme)*

1) Définition

Une partie K d'un espace vectoriel normé E est *compacte* si et seulement si toute suite d'éléments de K admet une sous-suite convergeant vers un élément de K. On dit aussi que K est *un compact* de E.

2) Premières propriétés

Tout compact d'un espace vectoriel normé est fermé et borné.

Dém. Soit K compact de E ; il vérifie la caractérisation séquentielle des fermés : en effet, soit (u_n) une suite convergente d'éléments de K ; je note ℓ sa limite. Par définition, (u_n) admet une sous-suite qui converge vers un élément de K, or cette limite est nécessairement ℓ puisque toute sous-suite de (u_n) converge vers ℓ ; donc par unicité de la limite $\ell \in K$. Ainsi K est fermé.

Je montre que K compact $\Rightarrow$ K borné par contraposition : si K n'est pas borné, je peux construire une suite (u_n) d'éléments de K vérifiant, par exemple, $\|u_n\| \geq n$ pour tout n ; alors aucune sous-suite de (u_n) ne peut converger !

3) Image directe d'un compact par une fonction continue

Théorème : si $f : A \to F$ est continue sur A et K compact de E inclus dans A, alors $f(K)$ est un compact de F.

Dém. Soit (y_n) une suite d'éléments de $f(K)$. Par définition de l'image directe, je dispose d'une suite (x_n) d'éléments de K telle que $y_n = f(x_n)$ pour tout n. K étant compact, je dispose d'une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ convergeant vers un élément ℓ de K. Mézalor, f éant continue en ℓ, $\left(f\left(x_{\varphi(n)}\right)\right)$ converge vers $f(\ell)$. J'ainsi trouvé une sous-suite de (y_n) convergeant vers un élément de $f(K)$. En conclusion $f(K)$ est compact.

Corollaire : si f est à valeurs réelles et continue sur un compact non vide K, alors f est bornée sur K et atteint ses bornes, notées $\min\limits_K f$, $\max\limits_K f$, les *extremums globaux* de f sur K (en effet, la borne supérieure (*resp.* inférieure) d'une partie de $\mathbb{R}$ est adhérente à cette partie, dès qu'elle existe).

Dém. Immédiat, puisque dans ce cas $f(K)$ est une partie fermée, bornée et non vide de $\mathbb{R}$. Elle admet donc une borne supérieure (*resp.* inférieure) qui appartient à $f(K)$ (en tant que point adhérent à un fermé). Il s'agit donc bien d'un plus grand (*resp.* petit) élément.

Cas particulier : toute application continue sur un compact non vide est bornée et les bornes supérieure et inférieure de sa norme sont atteintes.

Dém. Appliquer le corollaire précédent à la fonction $x \mapsto \|f(x)\|$.

V - Espaces vectoriels normés de dimension finie

1) Compléments hors programme

a) Équivalence des normes en dimension finie – conséquences

Théorème de Bolzano-Weierstrass : de toute suite bornée de $\mathbb{K}^p$ on peut extraire une suite convergente pour la norme N_∞.

Dém. Par récurrence sur p, en extrayant une "sous-sous-suite" pour chaque nouvelle composante...

Corollaire : les parties compactes de $\mathbb{K}^p$ muni de la norme N_∞ sont les parties fermées bornées.

Dém. Tout compact est fermé et borné, cf. § **IV-2**. Le théorème de Bolzano-Weierstrass fournit la réciproque dans $\mathbb{K}^p$.

Corollaire : dans $\mathbb{K}^p$, toutes les normes sont équivalentes.

Dém. Soit N une norme sur $\mathbb{K}^p$. Il suffit de montrer que N et N_∞ sont équivalentes (par transitivité il en résultera que toutes les normes sont équivalentes). Notons $\mathcal{C} = (e_1, \ldots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$. Soit $x = (x_1, \ldots x_p) \in \mathbb{K}^p$, j'ai grâce à l'inégalité triangulaire

$$N(x) \leq \sum_{k=1}^{p} |x_k| N(e_k) \leq \alpha N_\infty(x) \quad \text{où} \quad \alpha = \sum_{k=1}^{p} N(e_k).$$

Cette inégalité montre que l'application N est continue de $(\mathbb{K}^p, N_\infty)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, car α-lipschitzienne, puisque

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{K}^p)^2 \quad |N(x) - N(y)| \leq N(x-y) \leq \alpha N_\infty(x-y).$$

Or la sphère unité S de $(\mathbb{K}^p, N_\infty)$ est non vide et compacte (car fermée bornée), donc N atteint son minimum m sur S. Ledit minimum est strictement positif, puisque si $N_\infty(x) = 1$, x est non nul et donc $N(x) > 0$ car N est une norme.

J'ai alors, pour tout vecteur x non nul de $\mathbb{K}^p$,

$$N\left(\frac{1}{N_\infty(x)} \cdot x\right) \geq m \quad \text{d'où} \quad N_\infty(x) \leq \frac{1}{m} N(x)$$

et cette dernière majoration est vraie aussi pour $x = 0$! Ainsi N et N_∞ sont équivalentes.

Théorème fondamental

Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Dém. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie p, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots e_p)$ une base de E et N_1, N_2 deux normes sur E. Il est aisé de vérifier que, pour $j \in \{1, 2\}$, $\nu_j : (x_1, \ldots x_p) \mapsto N_j\left(\sum_{k=1}^{p} x_k e_k\right)$ est une norme sur $\mathbb{K}^p$. Nous venons de voir que ν_1 et ν_2 sont équivalentes, il en résulte immédiatement que N_1 et N_2 sont équivalentes.

b) Compacité

Théorème de Bolzano-Weierstrass : toute suite bornée d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie possède une sous-suite convergente.

Dém. Utiliser la norme N_∞ associée à une base, maintenant que l'on sait que la notion de convergence ne dépend pas du choix de la norme !

Théorème : dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, les parties compactes sont les fermés bornés.

Dém. La même que dans $\mathbb{K}^p$!

2) Les résultats au programme dans la filière PSI

b) Utilisation des coordonnées

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_d)$ une base de F et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de F.
Les suites coordonnées $(u_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$, pour $k \in [\![1, d]\!]$ sont définies par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \sum_{k=1}^{d} u_{n,k}.e_k.$$

Soit alors $\ell = \sum_{k=1}^{d} \ell_k.e_k$. Comme la notion de convergence ne dépend pas du choix de la norme, je choisis d'utiliser la norme $N_\infty : x = \sum_{k=1}^{d} x_k.e_k \mapsto \max_{1\leq k\leq d} |x_k|$ et je constate (classiquement !) que

$$N_\infty(u_n - \ell) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall k \in [\![1, d]\!] \quad |u_{n,k} - \ell_k| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

d'où le résultat : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si toutes les suites coordonnées convergent, auquel cas les coordonnées de la limite sont les limites des suites coordonnées.

De même pour l'étude de la limite en un point pour une fonction à valeurs dans F.

c) Continuité des applications linéaires et multilinéaires

Théorème : toute application linéaire d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel **de dimension finie** E dans un espace vectoriel normé F est lipschitzienne, donc continue.

Dém. Dans le cadre du programme officiel, ayant choisi une base $\mathcal{B}=(e_1,\ldots,e_d)$ de E on montre facilement que $u\in\mathcal{L}(E,F)$ est lipschitzienne de (E,N_∞) dans $(F,\|\cdot\|)$, où N_∞ est la norme habituelle associée à $\mathcal{B}$. En effet

$$\text{pour } x=\sum_{j=1}^{d}x_je,\ \text{j'ai}\quad \|u(x)\|=\left\|u\left(\sum_{j=1}^{d}x_je_j\right)\right\|\le kN_\infty(x)\quad \text{où}\quad k=\sum_{j=1}^{d}\|u(e_j)\|\,.$$

On en déduit que u est continue sur E, notion indépendante du choix de la norme dans E.
Puis on en déduit que u est lipschitzienne quel que soit le choix de la norme dans E, soit en utilisant la méthode du **III-5)**, soit en utilisant l'équivalence des normes (mais cette notion est hors programme).

Exercice : dans un espace vectoriel normé E de dimension finie, tout sous-espace vectoriel F est un fermé.

Dém. Il suffit de choisir un supplémentaire G de F et de considérer le projecteur p de E sur G parallèlement à F. Alors $F=\operatorname{Ker}p=p^{-1}(\{0\})$ est fermé, car p est continue sur E (linéaire en dimension finie) et $\{0\}$ est un fermé de E.

Théorème : plus généralement, si $E_1,\ldots,E_p$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, toute application p-linéaire f de l'espace produit $\prod_{k=1}^{p}E_k$ dans un espace vectoriel normé F est continue et il existe M dans $\mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall(x_1,\ldots,x_p)\in\prod_{k=1}^{p}E_k\quad \|f(x_1,\ldots,x_p)\|\le M\cdot\prod_{k=1}^{p}\|x_k\|\,.$$

Dém. Je montre d'abord la majoration ci-dessus dans le cas où chaque E_k est muni d'une base $\mathcal{B}_k=(e_{k,1},\ldots,e_{k,d_k})$ et de la norme "infinie" associée $N_k:\sum_{j=1}^{d_k}\lambda_je_{k,j}\mapsto\max_{1\le j\le d_k}|\lambda_j|$. Il suffit de développer par multilinéarité, pour $(x_1,\ldots,x_p)\in\prod_{k=1}^{p}E_k$ où $x_k=\sum_{j_k=1}^{d_k}x_{k,j_k}e_{k,j_k}$ pour tout k de $[\![1,p]\!]$:

$$f(x_1,\ldots,x_p)=\sum_{j_1=1}^{d_1}\cdots\sum_{j_p=1}^{d_p}x_{1,j_1}\cdots x_{p,j_p}f\left(e_{1,j_1},\ldots,e_{p,j_p}\right)$$

d'où

$$\|f(x_1,\ldots,x_p)\|\le M\cdot N_1(x_1)\cdots N_p(x_p)\quad \text{où}\quad M=\sum_{j_1=1}^{d_1}\cdots\sum_{j_p=1}^{d_p}\left\|f\left(e_{1,j_1},\ldots,e_{p,j_p}\right)\right\|.$$

J'en déduis la continuité de f sur $E=\prod_{k=1}^{p}E_k$: soient $a=(a_1,\ldots,a_p)$ et $x=(x_1,\ldots,x_p)$ dans E. Je pose

$$y_0=f(a_1,\ldots,a_p)\,,\ y_p=f(x_1,\ldots,x_p)\quad \text{et}\quad \forall k\in[\![1,p-1]\!]\quad y_k=f(x_1,\ldots,x_k,a_{k+1},\ldots,a_p)$$

de sorte que, par multilinéarité,

$$\forall k\in[\![1,p]\!]\quad y_k-y_{k-1}=f(x_1,\ldots,x_{k-1},x_k-a_k,a_{k+1},\ldots,a_p)$$

d'où

$$\begin{aligned}\|f(x_1,\ldots,x_p)-f(a_1,\ldots,a_p)\| &= \left\|\sum_{k=1}^{p}y_k-y_{k-1}\right\|\\ &\le M\cdot\sum_{k=1}^{p}N_1(x_1)\cdots N_1(x_{k-1})\,N_k(x_k-a_k)\,N_{k+1}(a_{k+1})\cdots N_p(a_p)\end{aligned}$$

et la continuité de f en a en résulte, puisque cette dernière somme tend vers 0 lorsque x tend vers a.

Reste à prouver l'existence de M pour des normes quelconques sur les E_k, ce qui là encore peut s'obtenir, soit en utilisant la méthode du **III-5)**, soit en utilisant l'équivalence des normes en dimension finie, donc dans chacun des E_k.