a) Comparaison des sommes partielles en cas de divergence

Nous supposons ici que $\sum a_n$ diverge, c'est-à-dire que $S_p = \sum\limits_{n=0}^{p} a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (termes réels positifs).

- Si en outre $u_n = O\left(a_n\right)$, je dispose de n_0 dans $\mathbb{N}$ et M dans $\mathbb{R}^{+*}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \Rightarrow |u_n| \leq M a_n$.
  Pour $p > n_0$, j'écris (dans le "style de Cesàro") :
  $$\left|\frac{\sum\limits_{n=0}^{p} u_n}{\sum\limits_{n=0}^{p} a_n}\right| \leq \frac{1}{S_p} \cdot \left|\sum_{n=0}^{n_0} u_n\right| + \frac{1}{S_n} \cdot \left|\sum_{n=n_0+1}^{p} u_n\right| \leq \frac{1}{S_p} \cdot \left|\sum_{n=0}^{n_0} u_n\right| + M$$
  car, les a_n étant des réels positifs :
  $$\left|\sum_{n=n_0+1}^{p} u_n\right| \leq \sum_{n=n_0+1}^{p} |u_n| \leq M \sum_{n=n_0+1}^{p} a_n \leq M \cdot S_p.$$
  Or, $\left|\sum\limits_{n=0}^{n_0} u_n\right|$ est une constante (vis à vis de p) et $S_p \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$; donc $\dfrac{1}{S_p} \cdot \left|\sum\limits_{n=0}^{n_0} u_n\right| \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0$, par définition de la limite je peux fixer n_1 dans $\mathbb{N}$ tel que
  $$\forall p \geq n_1 \quad \frac{1}{S_p} \cdot \left|\sum_{n=0}^{n_0} u_n\right| \leq M$$
  et j'ai alors : $\forall p \geq \max\left(n_0, n_1\right) \quad \left|\sum\limits_{n=0}^{p} u_n\right| \leq 2M \sum\limits_{n=0}^{p} a_n$; par conséquent :
  $$\boxed{\sum_{n=0}^{p} u_n = O\left(\sum_{n=0}^{p} a_n\right).}$$
- Si l'on remplace l'hypothèse "$u_n = O\left(a_n\right)$" par "$u_n = o\left(a_n\right)$", ce qui précède peut-être repris, en remplaçant M par un $\varepsilon > 0$ arbitraire, pour montrer que $\sum\limits_{n=0}^{p} u_n = o\left(\sum\limits_{n=0}^{p} a_n\right)$.
- Enfin, si l'on suppose "$b_n \sim a_n$", on a $b_n - a_n = o\left(a_n\right)$ et le résultat précédent montre que $\sum\limits_{n=0}^{p} b_n \sim \sum\limits_{n=0}^{p} a_n$.

b) Comparaison des restes en cas de convergence

Nous supposons ici que $\sum a_n$ converge.

- Si en outre $u_n = O\left(a_n\right)$, alors $\sum u_n$ est absolument convergente ($|u_n| = O\left(a_n\right)$).
  De plus je dispose de n_0 dans $\mathbb{N}$ et M dans $\mathbb{R}^{+*}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \Rightarrow |u_n| \leq M a_n$.
  Soit (p, q) dans $\mathbb{N}^2$ tel que $n_0 < p < q$; par l'inégalité triangulaire et d'après le choix de n_0 :
  $$\left|\sum_{n=p+1}^{q} u_n\right| \leq M \sum_{n=p+1}^{q} a_n.$$
  À la limite, lorsque q tend vers l'infini, j'obtiens : $\left|\sum\limits_{n=p+1}^{\infty} u_n\right| \leq M \sum\limits_{n=p+1}^{\infty} a_n$
  et cela est établi pour tout $p \geq n_0$; par conséquent :
  $$\boxed{\sum_{n=p+1}^{\infty} u_n = O\left(\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n\right).}$$
- Si l'on remplace l'hypothèse "$u_n = O\left(a_n\right)$" par "$u_n = o\left(a_n\right)$", ce qui précède peut-être repris, en remplaçant M par un $\varepsilon > 0$ arbitraire, pour montrer que $\sum\limits_{n=p+1}^{\infty} u_n = o\left(\sum\limits_{n=p+1}^{\infty} a_n\right)$.
- Enfin, si l'on suppose "$b_n \sim a_n$", on a $b_n - a_n = o\left(a_n\right)$ et le résultat précédent montre que $\sum\limits_{n=p+1}^{\infty} b_n \sim \sum\limits_{n=p+1}^{\infty} a_n$.