Des coefficients du polynôme caractéristique

Lemme : soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_n(t)$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme

$$A_n(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & f_n(t) \end{pmatrix}$$

où les f_k sont des fonctions affines et les $a_{i,j}$ sont indépendants de t. Alors son déterminant s'écrit

$$\det A_n(t) = \prod_{k=1}^{n} f_k(t) + R_n(t)$$

où R_n est un polynôme de degré au plus $n-2$ (éventuellement nul !).
En particulier $\det A_n(t)$ est un polynôme en t de degré au plus n (et exactement n si les f_k sont toutes de degré 1).

<u>Dém.</u> Par récurrence sur n :

- $\det A_1(t) = f_1(t) = \prod_{k=1}^{1} f_k(t) + R_1(t)$ avec $R_1 = 0$, de degré $-\infty$, qui est bien inférieur à $1-2$!
- supposons $n \geq 2$ tel que la propriété soit vraie au rang $n-1$; en développant le déterminant par rapport à la dernière ligne, j'obtiens

$$\det A_n(t) = f_n(t) \det A_{n-1}(t) + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n+j} a_{n,j} Q_j(t)$$

où les $Q_j(t)$ sont des déterminants d'ordre $n-1$:

$$Q_j(t) = \begin{vmatrix} f_1(t) & & & & & & a_{1,n} \\ & \ddots & & & & & \vdots \\ & & f_{j-1}(t) & & & & \vdots \\ a_{j,1} & \cdots & a_{j,j-1} & a_{j,j+1} & \cdots & \cdots & a_{j,n} \\ & & & f_{j+1}(t) & & & \vdots \\ & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & f_{n-1}(t) & a_{n-1,n} \end{vmatrix}.$$

Les échanges de lignes $L_i \leftrightarrow L_{i+1}$ pour $i = j, \ldots, n-2$ me donnent

$$Q_j(t) = (-1)^{n-1-j} \det B_{n-1}(t)$$

et l'hypothèse de récurrence s'applique à $B_{n-1}(t)$, dont les coefficients hors diagonale sont indépendants de t et les coefficients diagonaux des fonctions affines de t, plus précisément $n-2$ fonctions affines (les $f_k(t)$ pour $k \in [\![1, n-1]\!] \setminus \{j\}$) et une fonction **constante** $(a_{j,n})$. La propriété au rang $n-1$ montre alors que $\det B_{n-1}(t)$ est un polynôme en t de degré au plus $n-2$.
Par ailleurs, l'hypothèse de récurrence s'applique (plus directement !) à $A_{n-1}(t)$:

$$\det A_{n-1}(t) = \prod_{k=1}^{n-1} f_k(t) + R_{n-1}(t)$$

où R_{n-1} est un polynôme de degré au plus $n-3$; alors

$$\det A_n(t) = \prod_{k=1}^{n} f_k(t) + \left[f_n(t) R_{n-1}(t) + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n+j} \alpha_{n,j} Q_j(t) \right]$$

où le crochet est une somme de polynômes en t, tous de degré inférieur ou égal à $n-2$, c'est donc un polynôme en t de degré au plus $n-2$, ce qui achève la démonstration du lemme.

Soit maintenant $M = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le lemme s'applique à la matrice $M - tI_n$, avec, pour tout k, $f_k(t) = a_{k,k} - t$. Ainsi

$$\begin{aligned} \chi_M(t) &= (-1)^n \det(M - tI_n) = (-1)^n \left(\prod_{k=1}^{n} (a_{k,k} - t) + R_n(t) \right) \quad \text{où} \quad \deg R_n \leq n-2 \\ &= \prod_{k=1}^{n} (t - a_{k,k}) + (-1)^n R_n(t) \end{aligned}$$

Il en résulte que χ_M est unitaire de degré n et que le coefficient de t^{n-1} est celui de $\prod_{k=1}^{n} (t - a_{k,k})$, c'est-à-dire $-\sum_{k=1}^{n} a_{k,k}$ (cf. les relations entre coefficients et racines... Sinon preuve par récurrence immédiate). Je reconnais $-\operatorname{Tr}(M)$.

Enfin, le coefficient constant de χ_M est $\chi_M(0) = (-1)^n \det M$ par définition. En conclusion

$$\boxed{\chi_M(X) = X^n - \operatorname{Tr}(M) \cdot X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(M).}$$

Le résultat pour un endomorphisme s'en déduit en choisissant (arbitrairement) une base.

Dans le cas où χ_M est scindé sur $\mathbb{K}$, il s'écrit (puisque nous avons vu qu'il est unitaire de degré n !),

$$\chi_M(X) = \prod_{j=1}^{n} (X - \lambda_j)$$

où j'ai noté $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ **un système de racines** de χ_M (où les différentes racines sont éventuellement répétées selon leur multiplicité).

Autrement dit, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est **un système de valeurs propres** de M.

Il vient alors, grâce aux relations entre coefficients et racines et à l'unicité des coefficients d'un polynôme,

$$\boxed{\operatorname{Tr}(M) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \quad \text{et} \quad \det(M) = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j.}$$