Colle n° 22 – du 25 au 29/03/2019

Programme

1) *Calcul différentiel*

Les fonctions considérées sont définies sur un ouvert U de E, **à valeurs dans** $\mathbb{R}$, où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie *(pour la pratique, le programme se limite au cas où $E = \mathbb{R}^p$ ($p \leq 3$) et où f est de classe $\mathcal{C}^1$; l'étude de fonctions différentiables non de classe $\mathcal{C}^1$ est hors programme).* La définition de "*f différentiable en a*" a été vue en classe, mais le programme officiel en PSI se limite à la définiton de la différentielle dans le cas $\mathcal{C}^1$...

- développement limité à l'ordre 1, définition d'une fonction f différentiable en un point a de U et de la différentielle en a de f, notée $\mathrm{d}f\,(a) : h \mapsto \mathrm{d}f\,(a) \cdot h$; définition de la dérivée de f en un point a de U selon un vecteur non nul v, des dérivées partielles dans une base de E ; notations $\partial_j f$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$;
- définition des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ; théorème fondamental : si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, alors f est différentiable en tout point de U *(dém. non exigible)* ; si $\varphi : I \to U$ et $f : U \to \mathbb{R}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, leur composée $f \circ \varphi$ l'est aussi ; calcul pratique de de la dérivée de $f \circ \varphi$ (*règle de la chaîne*) ; exemples de changement de variables dans une équation aux dérivées partielles *(seuls les cas des changements de variables linéaires et des coordonnées polaires sont exigibles, la notion de difféomorphisme n'est pas au programme)* ;
- gradient d'une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1$ lorsque E est un espace euclidien, notation $\nabla f\,(a)$; lorsque l'ouvert U est convexe, inégalité des accroissements finis, caractérisation des fonctions constantes sur U ; points critiques d'une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1$, condition nécessaire d'existence d'un extremum local *(aucune condition suffisante n'est au programme)* ; définition des fonctions numériques de classe $\mathcal{C}^k$ sur U, algèbre $\mathcal{C}^k\,(U)$; théorème de Schwarz pour une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur U *(démonstration hors programme).*

2) *Notions sur les courbes et les surfaces*

Dans ce paragraphe, les courbes du plan ou de l'espace et les surfaces sont définies par paramétrages ou par équations cartésiennes. Aucune difficulté ne peut être soulevée sur l'équivalence de ces définitions.
L'objectif, très modeste, est d'introduire la notion de tangente à une courbe plane définie par une équation cartésienne $f\,(x, y) = 0$, et de plan tangent à une surface définie par une équation cartésienne $f\,(x, y, z) = 0$.
Aucune difficulté théorique ne peut être soulevée sur les notions étudiées dans ce paragraphe. Toutes les formes du théorème des fonctions implicites utiles pour traiter ce paragraphe sont admises.

- définition d'un point régulier d'une surface définie par paramétrage $(u, v) \mapsto \phi\,(u, v)$, où ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$; plan tangent, normale ;
- définition d'un point régulier d'une courbe plane définie par une équation cartésienne $f\,(x, y) = 0$, où f est à valeurs réelles et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$; tangente, normale ;
- cas d'une surface définie par une équation cartésienne $f\,(x, y, z) = 0$, où f est à valeurs réelles et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$; point régulier, plan tangent, normale ; tangentes aux courbes régulières de classe $\mathcal{C}^1$ tracées sur la surface.

Prévisions

La préparation à l'oral fin mai / début juin ! Les trois dernières semaines de colle seront regroupées pour proposer à chaque "candidat·e" une planche individuelle d'une demi-heure. Je vous contacterai bientôt pour vous préciser les modalités et les créneaux disponibles. Cela se passera entre le 20 mai et le 13 juin.
À bientôt donc et d'ores et déjà merci pour votre précieuse collaboration tout au long de cette année !

Compte rendu au verso – Merci...