Colle n° 20 – du 11 au 15/03/2019

Programme : *variables aléatoires discrètes*

Tous les résultats faisant intervenir des familles sommables sont admis.

- définition : une *variable aléatoire discrète* sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est une application X de Ω dans un ensemble fini ou dénombrable telle que l'image réciproque de tout élément de $X(\Omega)$ appartient à $\mathcal{A}$;
- loi d'une variable aléatoire discrète ; fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle discrète, croissance et limites en $\pm\infty$ *(l'étude de la continuité des fonctions de répartition n'est pas au programme)* ;
- soit I un ensemble fini ou dénombrable ; si $X : \Omega \to E$ prend ses valeurs dans $\{x_i,\ i \in I\}$ et si $(p_i)_{i\in I}$ est une famille de réels de $[0,1]$ telle que $\sum\limits_{i\in I} p_i = 1$, alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ tel que : $\forall i \in I \quad P(X = x_i) = p_i$ *(démonstration hors programme)* ;
- lois usuelles : loi uniforme $\mathcal{U}(E)$ où E ensemble fini ; loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ où $p \in [0,1]$; loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$; loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ où $p \in]0,1[$, exemple du "temps d'attente", caractérisation comme loi "sans mémoire" : $P(X > n+k | X > n) = P(X > k)$; loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ où $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson : soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires telle que, pour tout n, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$ où $np_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$. Alors : $\forall k \in \mathbb{N} \quad P(X_n = k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-\lambda} \cdot \dfrac{\lambda^k}{k!}$ *(la notion de convergence en loi est hors programme)* ;
- fonction d'une variable aléatoire discrète : si X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans E et φ une application de E dans F, alors $\varphi \circ X$, notée abusivement $\varphi(X)$, est aussi une variable aléatoire discrète ;
- couples de variables aléatoires discrètes : loi conjointe, lois marginales, loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$; indépendance ; si X et Y sont indépendantes, alors pour toutes fonctions f et g, $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes ; indépendance mutuelle d'une famille de variables aléatoires ;
- espérance : une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ (où les x_n sont disjoints 2 à 2) est dite *d'espérance finie* si la série $\sum x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente, auquel cas la somme de cette série est appelée *espérance de* X, notée $E(X)$; théorème du transfert ; linéarité, positivité, croissance de l'espérance ; si X et Y sont indépendantes et d'espérance finie, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$; si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, relation $E(X) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(X \geq n)$;
- variance : si X^2 est d'espérance finie, il en est de même de X et de $\big(X - E(X)\big)^2$; la *variance de* X est alors $V(X) = E\Big(\big(X - E(X)\big)^2\Big) = E\left(X^2\right) - E(X)^2$ et *l'écart type de* X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$; variance d'une somme finie de variables aléatoires réelles discrètes ; *covariance* $\operatorname{Cov}(X,Y)$, *coefficient de corrélation* $\rho(X,Y)$ lorsque les variances sont non nulles ;
- inégalités de Markov, Bienaymé-Tchebychev et Cauchy-Schwarz : $|\rho(X,Y)| \leq 1$; loi faible des grands nombres ;
- fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$; définition de $G_X(t) = E\left(t^X\right)$, le rayon de convergence est au moins égal à 1 ; X (*resp.* X^2) est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable (*resp.* deux fois dérivable) en 1 ; fonction génératrice d'une somme de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$; fonctions génératrices associées aux lois usuelles.

Prévisions

Calcul différentiel.

Compte rendu au verso – Merci...