Colle n° 19 – du 04 au 08/03/2019

Programme

1) ***Probabilités***

- ensembles dénombrables : un ensemble est dit *dénombrable* s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$; un ensemble fini ou dénombrable peut être décrit en extension sous la forme $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$; dénombrabilité de $\mathbb{Z}$, d'un produit cartésien de deux ensembles dénombrables *(toute autre connaissance sur la dénombrabilité est hors programme) ;*
- notion de tribu : une *tribu* sur un ensemble Ω est une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$, contenant Ω, stable par passage au complémentaire et par union dénombrable ; $(\Omega, \mathcal{A})$ est alors un espace *probabilisable* ; $\mathcal{A}$ est stable par intersection dénombrable ;
- notion de probabilité : une *probabilité* sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application P de $\mathcal{A}$ dans $[0,1]$ telle que $P(\Omega) = 1$ et σ-additive ; $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est alors un espace *probabilisé* ;
- premières propriétés d'une probabilité : probabilité de l'événement contraire d'un événement ; croissance, continuité croissante, continuité décroissante, sous-additivité ;
- conditionnement : lorsque $P(A) > 0$, définition de la *probabilité de B sachant A*, notée $P_A(B)$ ou $P(B|A)$; P_A est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$; formule des probabilités composées (par convention, $P(A)P(B|A) = 0$ lorsque $P(A) = 0$) ; systèmes (finis ou dénombrables) complets, quasi complets d'événements ; formule des probabilités totales ; formule de Bayes ;
- indépendance : indépendance de deux événements, indépendance mutuelle d'une famille finie d'événements ; l'indépendance deux à deux n'entraîne pas l'indépendance mutuelle.

2) ***Variables aléatoires discrètes***

- définition : une *variable aléatoire discrète* sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est une application X de Ω dans un ensemble fini ou dénombrable telle que l'image réciproque de tout élément de $X(\Omega)$ appartient à $\mathcal{A}$;
- loi d'une variable aléatoire discrète ; fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle discrète, croissance et limites en $\pm\infty$ *(l'étude de la continuité des fonctions de répartition n'est pas au programme)* ;
- soit I un ensemble fini ou dénombrable ; si $X : \Omega \to E$ prend ses valeurs dans $\{x_i,\ i \in I\}$ et si $(p_i)_{i\in I}$ est une famille de réels de $[0,1]$ telle que $\sum\limits_{i\in I} p_i = 1$, alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ tel que : $\forall i \in I \quad P(X = x_i) = p_i$ *(démonstration hors programme)* ;
- lois usuelles *(sans espérance ni variance dans le cas dénombrable pour l'instant...)* : loi uniforme $\mathcal{U}(E)$ où E ensemble fini ; loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ où $p \in [0,1]$; loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$; loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ où $p \in]0,1[$, exemple du "temps d'attente", caractérisation comme loi "sans mémoire" : $P(X > n+k | X > n) = P(X > k)$; loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ où $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson : soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires telle que, pour tout n, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$ où $np_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$.

  Alors : $\forall k \in \mathbb{N} \quad P(X_n = k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-\lambda} \cdot \dfrac{\lambda^k}{k!}$ *(la notion de convergence en loi est hors programme)* ;
- fonction d'une variable aléatoire discrète : si X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans E et φ une application de E dans F, alors $\varphi \circ X$, notée abusivement $\varphi(X)$, est aussi une variable aléatoire discrète.

Prévisions

Variables aléatoires discrètes (suite et fin).

Compte rendu au verso – Merci...