Colle n° 13 – du 07 au 11/01/2019

Programme

1) ***Intégration sur un intervalle quelconque***

- théorème de convergence dominée : soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes, continues par morceaux sur I et φ une fonction continue par morceaux, positive et intégrable sur I telles que, pour tout entier n, $|f_n| \leq \varphi$; si (f_n) converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I, alors les f_n et f sont intégrables sur I et $\displaystyle\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n$ (***le théorème de convergence monotone n'est pas au programme***) ;
- intégration terme à terme d'une série de fonctions : soit (u_n) une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes, continues par morceaux et intégrables sur I, telle que la série $\sum u_n$ converge simplement sur I vers une fonction u continue par morceaux sur I et telle que la série $\displaystyle\sum \int_I |u_n|$ converge ; alors $u = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est intégrable sur I et $\displaystyle\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n$;
- intégrales dépendant d'un paramètre : continuité sous le signe $\int$, dérivation sous le signe $\int$, formule de Leibniz ; les énoncés précis du nouveau programme sont en ligne dans le résumé de cours (Ch.07-p.11) ; *comme pour les suites et séries de fonctions, les étudiants sont habitués à utiliser les théorèmes dans le cas où le paramètre décrit un sous-intervalle où la domination se passe bien (plutôt que d'utiliser la "domination sur tout segment"). Si besoin ils concluent pour la régularité de la fonction* $x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ *grâce au caractère local de la continuité ou de la dérivabilité.*

2) ***Espaces préhilbertiens réels***

- produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, norme associée ; inégalité de Cauchy-Schwarz ;
- orthogonal $F^{\perp}$ (ou F^{o}) d'un sous-espace vectoriel F, sous-espaces vectoriels orthogonaux ; procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt ;
- projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie, distance d'un point à un tel sous-espace, inégalité de Bessel.

3) ***Espaces euclidiens***

- existence de bases orthonormales ; écriture matricielle et expression analytique du produit scalaire dans une base orthonormale ; isomorphisme canonique entre E et son dual *(l'étude de la dualité n'est plus au programme, mais le terme de* dual *a été utilisé)*, normale à un hyperplan ;
- endomorphismes symétriques : définition, caractérisation par la matrice dans une base orthonormale *(la notion d'adjoint n'est plus au programme ; le théorème spectral sera vu ultérieurement).*

Prévisions

Une belle et heureuse année 2019 !

Et, pour la semaine 14, espaces euclidiens (suite et fin).

Compte rendu au verso – Merci...