Colle n° 12 – du 17 au 21/12/2018

Programme

1) ***Intégration sur un intervalle quelconque***

- définition d'une fonction continue par morceaux, intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux ; extension des propriétés de l'intégrale sur un segment vues en 1re année pour les fonctions continues ;
- définition d'une intégrale impropre convergente, divergente, pour une fonction à valeurs réelles ou complexes, continue par morceaux sur un intervalle non trivial I de $\mathbb{R}$: cas où I est de la forme $[a,b[$, $]a,b]$ ou $]a,b[$ (où $-\infty \leq a < b \leq +\infty$) ; cohérence de la notation avec le cas d'un segment ;
- intégrales des fonctions positives : utilisation des relations de comparaisons, intégrales de référence (Riemann, ln, exp) ;
- intégrales absolument convergentes : définitions (une fonction est dite *intégrable* lorsque son intégrale est absolument convergente) ; une intégrale absolument convergente est convergente ;
- propriétés de l'intégrale : linéarité, relation de Chasles, inégalité de la moyenne, changement de variable $\mathcal{C}^1$ bijectif, intégration par parties lorsque le crochet admet des limites finies aux deux bornes ; les autres cas doivent être mis en œuvre d'abord sur un segment, avant un éventuel passage à la limite ;
- norme de la convergence en moyenne sur l'espace $\mathcal{L}^1_c(I,\mathbb{K})$ des fonctions continues et intégrables sur I ; norme de la convergence en moyenne quadratique sur l'espace $\mathcal{L}^2_c(I,\mathbb{R})$ des fonctions réelles continues et de carré intégrable sur I.
- théorème de convergence dominée : soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes, continues par morceaux sur I, et φ une fonction continue par morceaux, positive et intégrable sur I telles que, pour tout entier n, $|f_n| \leq \varphi$; si (f_n) converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I, alors les f_n et f sont intégrables sur I et $\displaystyle\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n$ (***le théorème de convergence monotone n'est pas au programme***) ;
- intégration terme à terme d'une série de fonctions : soit (u_n) une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes, continues par morceaux et intégrables sur I, telle que la série $\sum u_n$ converge simplement sur I vers une fonction u continue par morceaux sur I et telle que la série $\displaystyle\sum \int_I |u_n|$ converge ; alors $\displaystyle u = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est intégrable sur I et $\displaystyle\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n$;
- intégrales dépendant d'un paramètre : continuité sous le signe $\int$, dérivation sous le signe $\int$, formule de Leibniz ; les énoncés précis sont en ligne dans le résumé de cours (Ch.07 – p.11) ; *comme pour les suites et séries de fonctions, les étudiants sont habitués à utiliser les théorèmes dans le cas où le paramètre décrit un sous-intervalle où la domination se passe bien (plutôt que d'utiliser la "domination sur tout segment"). Si besoin ils concluent pour la régularité de la fonction* $\displaystyle x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ *grâce au caractère local de la continuité ou de la dérivabilité.*

Prévisions

Les vacances et de belles fêtes de fin d'année...

Et, pour la semaine 13, espaces préhilbertiens et euclidiens.