

Colle n° 11 – du 10 au 14/12/2018

Programme**1) Séries entières**

- rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ d'une variable complexe associée à une suite (a_n) de nombres complexes ; continuité de la somme sur le disque ouvert de convergence (*résultat admis ; aucun résultat général sur la convergence de la série ou la continuité de la fonction somme en un point du bord du disque de convergence n'est au programme*) ; somme et produit de Cauchy de deux séries entières ;
- séries entières d'une variable réelle : intégration, dérivation terme à terme ; la somme f d'une série entière est de classe \mathcal{C}^∞ sur l'intervalle ouvert de convergence, expression des coefficients à l'aide des dérivées de f ; définition d'une fonction développable en série entière sur un intervalle $] -r, r[$, de la série de Taylor d'une fonction f de classe \mathcal{C}^∞ sur un intervalle $] -r, r[$; développement en série de Taylor de e^{tz} ($z \in \mathbb{C}$), de $\sin t$, $\cos t$, $\ln(1+t)$, $(1+t)^\alpha$; développement d'une fonction en série entière à l'aide d'une équation différentielle linéaire.

2) Intégration sur un intervalle quelconque

- définition d'une fonction continue par morceaux, intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux ; extension des propriétés de l'intégrale sur un segment vues en 1^{re} année pour les fonctions continues ;
- définition d'une intégrale impropre convergente, divergente, pour une fonction à valeurs réelles ou complexes, continue par morceaux sur un intervalle non trivial I de \mathbb{R} : cas où I est de la forme $[a, b[$, $]a, b]$ ou $]a, b[$ (où $-\infty \leq a < b \leq +\infty$) ; cohérence de la notation avec le cas d'un segment ;
- intégrales des fonctions positives : utilisation des relations de comparaisons, intégrales de référence (RIEMANN, \ln , \exp) ;
- intégrales absolument convergentes : définitions (une fonction est dite *intégrable* lorsque son intégrale est absolument convergente) ; une intégrale absolument convergente est convergente ;
- propriétés de l'intégrale : linéarité, relation de CHASLES, inégalité de la moyenne, changement de variable \mathcal{C}^1 bijectif, intégration par parties lorsque le crochet admet des limites finies aux deux bornes ; les autres cas doivent être mis en œuvre d'abord sur un segment, avant un éventuel passage à la limite ;
- norme de la convergence en moyenne sur l'espace $\mathcal{L}_c^1(I, \mathbb{K})$ des fonctions continues et intégrables sur I ; norme de la convergence en moyenne quadratique sur l'espace $\mathcal{L}_c^2(I, \mathbb{R})$ des fonctions réelles continues et de carré intégrable sur I .

Prévisions

Convergence dominée, intégrales dépendant d'un paramètre.