Colle n° 10 – du 03 au 07/12/2018

Programme

1) ***Suites et séries de fonctions*** (I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$)

- convergence simple, convergence uniforme sur I d'une suite (*resp.* d'une série) de fonctions définies sur I, à valeurs réelles ou complexes ;
- norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;
- convergence normale sur I d'une série de fonctions ;
- *régularité de la limite d'une suite de fonctions* : continuité de la limite d'une suite de fonctions continues convergeant uniformément sur I ; théorème de la double limite *(démonstrations non exigibles)* ; dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions (f_n) de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, convergeant simplement sur I et telle que (f_n') converge uniformément sur I ; extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ (il suffit que les $\left(f_n^{(j)}\right)$ convergent simplement pour $0 \leq j \leq k-1$ et que $\left(f_n^{(k)}\right)$ converge uniformément) ;
- *régularité de la somme d'une série de fonctions* : application des théorèmes précédents ;
- remarque sur les deux points précédents : pour la continuité et la dérivabilité, les étudiants sont habitués à utiliser si besoin les théorèmes sur des sous-intervalles où il y a convergence uniforme (plutôt que la "convergence uniforme sur tout segment de I" qui peut entraîner des confusions) ;
- interversion limite–intégrale (*resp.* intégration terme à terme), dans le cas d'intégrales ***sur un segment*** où il y a convergence uniforme d'une suite (*resp.* d'une série) de fonctions continues sur ledit segment.

2) ***Séries entières***

- rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ d'une variable complexe associée à une suite (a_n) de nombres complexes ; continuité de la somme sur le disque ouvert de convergence *(résultat admis ; aucun résultat général sur la convergence de la série ou la continuité de la fonction somme en un point du bord du disque de convergence n'est au programme)* ; somme et produit de Cauchy de deux séries entières ;
- séries entières d'une variable réelle : intégration, dérivation terme à terme ; la somme f d'une série entière est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence, expression des coefficients à l'aide des dérivées de f ; définition d'une fonction développable en série entière sur un intervalle $]-r,r[$, de la série de Taylor d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle $]-r,r[$; développement en série de Taylor de e^{tz} ($z \in \mathbb{C}$), de $\sin t$, $\cos t$, $\ln(1+t)$, $(1+t)^\alpha$; développement d'une fonction en série entière à l'aide d'une équation différentielle linéaire.

Prévisions

Intégration sur un intervalle quelconque.

Compte rendu au verso – Merci...