Colle n$^{\text{o}}$ 08 – du 19 au 23/11/2018

Programme

1) ***Espaces vectoriels normés de dimension finie***

- dans un espace vectoriel normé de dimension finie, les propriétés topologiques, la convergence d'une suite, la continuité d'une fonction, etc. ne dépendent pas du choix de la norme *(résultat admis)* ;
- caractérisation de la convergence d'une suite à l'aide des coordonnées dans une base ;
- point intérieur à une partie, partie ouverte ; point adhérent à une partie, partie fermée ; caractérisation séquentielle des points adhérents, des parties fermées ; adhérence, intérieur, frontière d'une partie *(pour ces trois termes, seules les définitions sont au programme)* ;
- limites et continuité d'une application f d'une partie A d'un espace vectoriel normé E de dimension finie dans un autre F ; caractérisation à l'aide des coordonnées dans une base de F ; caractérisation séquentielle ; opérations sur les limites ; composition ; image réciproque d'une partie ouverte, d'une partie fermée de F par une application continue sur E *(la notion d'ouverts et de fermés relatifs à une partie, la caractérisation de la continuité par images réciproques d'ouverts, de fermés, sont hors programme)* ;
- *la notion de compacité a été évoquée, mais* **le seul** *théorème désormais au programme sur le sujet est le suivant :* toute fonction réelle continue sur une partie fermée bornée non vide d'un e.v.n. de dimension finie est bornée et atteint ses bornes *(le théorème de* BOLZANO-WEIERSTRASS*, la continuité uniforme et le théorème de* HEINE *sont hors programme)* ;
- continuité des applications linéaires : toute application linéaire sur un espace de dimension finie est lipschitzienne ; *la notion de norme subordonnée est hors programme* ;
- continuité des applications multilinéaires, des applications polynomiales.

2) ***Suites et séries de fonctions*** **(I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$)**

- convergence simple, convergence uniforme sur I d'une suite (*resp.* d'une série) de fonctions définies sur I, à valeurs réelles ou complexes ;
- norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;
- convergence normale sur I d'une série de fonctions ;
- *continuité de la limite d'une suite de fonctions* : continuité de la limite d'une suite de fonctions continues convergeant uniformément sur I ; théorème de la double limite *(démonstrations non exigibles)* ;
- *continuité de la somme d'une série de fonctions* : application des théorèmes précédents ;
- remarque sur les deux points précédents : pour la continuité, les étudiants sont habitués à utiliser si besoin les théorèmes sur des sous-intervalles où il y a convergence uniforme (plutôt que la "convergence uniforme sur tout segment de I" qui peut entraîner des confusions) ;
- interversion limite–intégrale (*resp.* intégration terme à terme), dans le cas d'intégrales ***sur un segment*** où il y a convergence uniforme d'une suite (*resp.* d'une série) de fonctions continues sur ledit segment.

Prévisions

Suites et séries de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Compte rendu au verso – Merci...