

Colle n° 07 – du 12 au 16/11/2018

Programme**1) Suites numériques : repasse du programme de PCSI****2) Normes sur un \mathbb{K} -espace vectoriel E – convergence des suites**

- définition d'une norme sur un \mathbb{K} -espace vectoriel, distance associée, boules, parties bornées, fonctions bornées, applications lipschitziennes ; l'application $x \mapsto \|x\|$ est 1-lipschitzienne ;
- distance d'un point à une partie non vide ; l'application $x \mapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne ;
- suites convergentes, divergentes, suites extraites (*la notion de valeur d'adhérence est hors programme*) ;
- normes équivalentes : *la notion a été évoquée mais n'est pas au programme* ;
- normes usuelles : norme associée à un produit scalaire (**cas réel uniquement**) ; normes N_1, N_∞ (et N_2 lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) sur \mathbb{K}^p et sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$; norme $N_\infty : u \mapsto \sup \|u_n\|$ sur l'espace vectoriel $\ell^\infty(E)$ des suites bornées d'éléments de E ; norme $N_1 : u \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ sur l'espace $\ell^1(\mathbb{C})$ des suites complexes (u_n) telles que $\sum |u_n|$ converge ; norme $N_2 : u \mapsto \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2}$ sur l'espace $\ell^2(\mathbb{R})$ des suites réelles (u_n) telles que $\sum u_n^2$ converge.

3) Espaces vectoriels normés de dimension finie

- dans un espace vectoriel normé de dimension finie, les propriétés topologiques, la convergence d'une suite, la continuité d'une fonction, etc. ne dépendent pas du choix de la norme (*résultat admis*) ;
- caractérisation de la convergence d'une suite à l'aide des coordonnées dans une base ;
- point intérieur à une partie, partie ouverte ; point adhérent à une partie, partie fermée ; caractérisation séquentielle des points adhérents, des parties fermées ;
- adhérence, intérieur, frontière d'une partie (*pour ces trois termes, seules les définitions sont au programme*) ;
- limites et continuité d'une application f d'une partie A d'un espace vectoriel normé E de dimension finie dans un autre F ; caractérisation à l'aide des coordonnées dans une base de F ; caractérisation séquentielle ; opérations sur les limites ; composition ; image réciproque d'une partie ouverte, d'une partie fermée de F par une application continue sur E (*la notion d'ouverts et de fermés relatifs à une partie, la caractérisation de la continuité par images réciproques d'ouverts, de fermés, sont hors programme*) ;
- *la notion de compacité a été évoquée, mais le seul théorème désormais au programme sur le sujet est le suivant* : toute fonction réelle continue sur une partie fermée bornée non vide d'un e.v.n. de dimension finie est bornée et atteint ses bornes (*le théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS, la continuité uniforme et le théorème de HEINE sont hors programme*) ;
- continuité des applications linéaires : toute application linéaire sur un espace de dimension finie est lipschitzienne (*la notion de norme subordonnée est hors programme*) ;
- continuité des applications multilinéaires, des applications polynomiales.

Prévisions

Suites et séries de fonctions.