Colle n° 06 – du 05 au 09/11/2018

Programme

1) *Séries numériques*

- série $\sum u_n$ associée à une suite (u_n) d'éléments de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; définition d'une série convergente, de sa somme et du reste de rang p ; espace vectoriel des séries convergentes ;
- $\lim u_n = 0$ est une condition nécessaire de convergence de la série $\sum u_n$;
- séries absolument convergentes ; toute série absolument convergente est convergente ;
- théorème spécial des séries alternées : convergence d'une série alternée dont la valeur absolue du terme général décroît vers 0 ; signe et majoration du reste *(aucune autre connaissance sur les séries semi-convergentes n'est exigible)* ;
- séries de nombres réels positifs ; utilisation des relations de comparaison *(aucun résultat sur les sommations d'équivalents n'est au programme)*, comparaison à une série géométrique, à une série de Riemann ;
- règle de D'ALEMBERT *(la comparaison logarithmique n'est pas au programme)* ;
- comparaison à une intégrale : si f est continue par morceaux décroissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, la série de terme général $w_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} f - f(n)$ est convergente ; en particulier, la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[0, +\infty[$;
- formule de Stirling *(démonstration non exigible)* ;
- dans $\mathbb{C}$, produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes *(démonstration non exigible)*, série exponentielle.

2) *Suites numériques : repasse du programme de PCSI*

3) *Normes sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E – convergence des suites*

- définition d'une norme sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, distance associée, boules, parties bornées, fonctions bornées, applications lipschitziennes ; l'application $x \mapsto \|x\|$ est 1-lipschitzienne ;
- distance d'un point à une partie non vide ; l'application $x \mapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne ;
- suites convergentes, divergentes, suites extraites *(la notion de valeur d'adhérence est hors programme)* ;
- normes équivalentes : *la notion a été évoquée mais n'est pas au programme* ;
- normes usuelles : norme associée à un produit scalaire ***(cas réel uniquement)*** ; normes N_1, N_∞ (et N_2 lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) sur $\mathbb{K}^p$ et sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$) ; norme $N_\infty : u \mapsto \sup \|u_n\|$ sur l'espace vectoriel $\ell^\infty(E)$ des suites bornées d'éléments de E ; norme $N_1 : u \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ sur l'espace $\ell^1(\mathbb{C})$ des suites complexes (u_n) telles que $\sum |u_n|$ converge ; norme $N_2 : u \mapsto \sqrt{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2}$ sur l'espace $\ell^2(\mathbb{R})$ des suites réelles (u_n) telles que $\sum u_n^2$ converge.

Prévisions

Espaces vectoriels normés (suite et fin).

Compte rendu au verso – Merci...