Colle n$^{\text{o}}$ 05 – du 15 au 19/10/2018

Programme

1) ***Réduction d'un endomorphisme en dimension finie***

- définition d'un endomorphisme diagonalisable (E est somme directe des sous-espaces propres), projecteurs p_λ associés, relation $u = \sum \lambda . p_\lambda$;
- u est diagonalisable si et seulement s'il annule un polynôme *scindé à racines simples* (*i.e.* scindé dont toutes les racines sont simples), si et seulement s'il annule $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$;
- si u est diagonalisable, alors, pour tout sous-espace F stable par u, l'endomorphisme de F induit par u l'est aussi
- définition d'un endomorphisme trigonalisable (il existe une base où sa matrice est triangulaire) ;
- u est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé, si et seulement s'il annule un polynôme scindé ;
- définition d'une matrice carrée diagonalisable, trigonalisable ;
- pratique de la diagonalisation et de la trigonalisation, applications *(aucune connaissance sur la notion de sous-espace caractéristique n'est exigible, la réduction de* JORDAN *est hors programme ; aucune méthode générale de réduction à la forme triangulaire n'est exigible).*

2) ***Séries numériques – repasse du programme de PCSI***

- série $\sum u_n$ associée à une suite (u_n) d'éléments de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, suite (S_p) des sommes partielles de cette série ; définition d'une série convergente, de sa somme notée $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ et du reste de rang p $\sum\limits_{n=p+1}^{+\infty} u_n$; espace vectoriel des séries convergentes ; $\lim u_n = 0$ est une condition nécessaire de convergence de la série $\sum u_n$;
- séries absolument convergentes ; toute série absolument convergente est convergente ***(la notion de suite de*** CAUCHY ***n'est pas au programme)*** ;
- séries à termes réels positifs : pour qu'une série $\sum u_n$ de réels positifs converge, il faut et il suffit que la suite des sommes partielles soit majorée ; utilisation des relations de comparaison *(aucun résultat sur les sommations d'équivalents n'est au programme)*, comparaison à une série géométrique, à une série de RIEMANN.

3) ***Compléments sur les séries numériques***

- <u>théorème spécial des séries alternées</u> : une série alternée dont la valeur absolue du terme général décroît vers 0 converge ; signe et majoration du reste *(aucune autre connaissance sur les séries semi-convergentes n'est exigible)* ;
- règle de D'ALEMBERT ***(la comparaison logarithmique n'est pas au programme)*** ;
- comparaison à une intégrale : si f est continue par morceaux décroissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, la série de terme général $w_n = \int_{n-1}^{n} f - f(n)$ est convergente ; en particulier, la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[0, +\infty[$; formule de STIRLING *(démonstration non exigible)* ;
- dans $\mathbb{C}$, produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes *(démonstration non exigible)*, série exponentielle.

Prévisions

Espaces vectoriels normés.

Compte rendu au verso – Merci...