

## Colle n° 04 – du 08 au 12/10/2018

**Programme****1) Éléments propres d'un endomorphisme et d'une matrice carrée**

- valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'un endomorphisme ; le spectre de  $u$  est noté  $\text{Sp}(u)$ , le sous-espace propre  $\text{Ker}(u - \lambda \cdot \text{Id}_E)$  est noté  $E_\lambda(u)$  ;
- valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'une matrice carrée : les éléments propres de  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  sont ceux de l'endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$  canoniquement associé à  $M$  ; notations  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(M)$ ,  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$  ; spectres de deux matrices semblables ;
- polynôme caractéristique (*désormais unitaire !*), ordre de multiplicité d'une valeur propre ; théorème de CAYLEY-HAMILTON (*démonstration non exigible*).

**2) Réduction d'un endomorphisme en dimension finie**

- définition d'un endomorphisme diagonalisable ( $E$  est somme directe des sous-espaces propres), projecteurs  $p_\lambda$  associés, relation  $u = \sum \lambda \cdot p_\lambda$  ;
- $u$  est diagonalisable si et seulement s'il annule un polynôme scindé à racines simples (*i.e.* scindé dont toutes les racines sont simples), si et seulement s'il annule  $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)$  ;
- si  $u$  est diagonalisable, alors, pour tout sous-espace  $F$  stable par  $u$ , l'endomorphisme de  $F$  induit par  $u$  l'est aussi ;
- définition d'un endomorphisme trigonalisable (il existe une base où sa matrice est triangulaire) ;
- $u$  est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé, si et seulement s'il annule un polynôme scindé ;
- définition d'une matrice carrée diagonalisable, trigonalisable ;
- pratique de la diagonalisation et de la trigonalisation, applications (*aucune connaissance sur la notion de sous-espace caractéristique n'est exigible, la réduction de JORDAN est hors programme ; aucune méthode générale de réduction à la forme triangulaire n'est exigible*).

**Prévisions**

Séries numériques.