Colle n° 03 – du 01 au 05/10/2018

Programme

1) *Compléments d'algèbre linéaire*

- hyperplans et formes linéaires ***(l'étude de la dualité n'est pas au programme)*** ;
- trace d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie ; le rang d'un projecteur est égal à sa trace ;
- rappels sur les déterminants ; déterminant d'une matrice définie par blocs ;
- déterminant de Vandermonde ***(désormais au programme, mais l'interpolation de Lagrange et la comatrice n'y sont plus)***.

2) *Sous-espaces stables par un endomorphisme*

- définition d'un sous-espace stable par un endomorphisme, de l'endomorphisme induit ;
- si E est de dimension finie, caractérisation des endomorphismes stabilisant un sous-espace F par leur matrice dans une base adaptée à F ; lorsque $E = \bigoplus_{j=1}^{p} E_j$, caractérisation des endomorphismes stabilisant les E_j par leur matrice dans une base de E adaptée à cette décomposition ;
- une base d'un espace vectoriel E étant donnée, caractérisation des endomorphismes de E dont la matrice dans cette base est diagonale (*resp.* triangulaire supérieure).

3) *Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice carrée*

- $u \in \mathcal{L}(E)$ étant donné, l'application $P \mapsto P(u)$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$ est linéaire et multiplicative ***(la notion de $\mathbb{K}$-algèbre est hors programme)*** ; pour tout P de $\mathbb{K}[X]$, $\operatorname{Im} P(u)$ et $\operatorname{Ker} P(u)$ sont stables par u (***à part les notions de multiples, diviseurs et la division euclidienne, l'arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$ et la notion d'idéal ne sont plus au programme***) ;
- application à l'étude du morphisme $P \mapsto P(M)$ où $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

4) *Éléments propres d'un endomorphisme et d'une matrice carrée*

- valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'un endomorphisme ; le spectre de u est noté $\operatorname{Sp}(u)$, le sous-espace propre $\operatorname{Ker}(u - \lambda.\operatorname{Id}_E)$ est noté $E_\lambda(u)$;
- valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'une matrice carrée : les éléments propres de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont ceux de l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M ; notations $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(M)$, $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$; spectres de deux matrices semblables ;
- polynôme caractéristique ***(désormais unitaire !)***, ordre de multiplicité d'une valeur propre ; théorème de Cayley-Hamilton *(démonstration hors programme)*.

Prévisions

Diagonalisation, trigonalisation, applications.

Compte rendu au verso – Merci...